6467

Ing. Nevěřil Fedor

EX LIBRIS
NEVĚŘIL FEDOR, dipl. ing.
No

Ing. Nevečerel Feodor

RAD JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI

KNJIGA 276.

EX LIBRIS
NEVEČEREL FEODOR, dipl. ing.
No .....

ODJEL ZA MATEMATIČKE, FIZIČKE I TEHNIČKE NAUKE

KNJIGA II.

UREDNIK:

AKADEMIK JOSIP LONČAR

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

EX LIBRIS
NEVEŠĆEREL THODOR, dipl. Ing.

RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI

ZAGREB

1949

ŠTAMPARSKI ZAVOD »OGNJEN PRICA«, ZAGREB

Dr. VLADIMIR S. VRKLJAN

O PROBLEMU PROŠIRENJA DIRACOVIH SPINORA NA VIŠE KOMPONENATA

1. Diracova i Darwinova metoda

Poznato je, da se u Diracovoj teoriji elektrona može izvesti magnetski moment elektrona i pozitrona na tri razna načina (ili pomoću tri razne metode). Prvi je način posve općenit, samo uz obzir na Diracove uvjete za linearizaciju Hamiltonove relativističke funkcije[1]

$$\alpha_\beta^2 = 1 \qquad \alpha_\beta \alpha_\gamma = -\alpha_\gamma \alpha_\beta \qquad (\beta, \gamma = 1, 2, 3, 4; \gamma \neq \beta) \quad (1)$$

Ovaj uvjet, kako je poznato, zadovoljavaju kvadratske hermitske matrice, koje su najmanje četvrtoga reda, jer se ne mogu naći četiri matrice drugoga ili trećega reda, koje bi zadovoljavale uvjete (1).

Drugi je način (po Darwinu[2]) sa specijalizacijom Diracovih matrica, t. j., da eksplicite napišemo matrice, koje zadovoljavaju uvjete (1) i njima pripadne linearne diferencijalne jednadžbe, a zatim da od njih primjenom izvjesnih operatora dobijemo diferencijalne jednadžbe drugog reda, u kojima odmah poređenjem s poznatom Schrödingerovom valnom (o vremenu nezavisnom) jednadžbom razabiramo u izrazu za energiju magnetski momenat elektrona (ili pozitrona) u iznosu Bohrova magnetona. Samo usput spominjem, da se u izrazu za energiju dobije i imaginarni električki moment elektrona (ili pozitrona). Međutim zadatak ove radnje nije studij samih magnetskih momenata elektrona i pozitrona, već pitanje proširenja spinora tih čestica na više od četiri komponente. Poznato je naime, da se Diracovo rješenje problema elektrona i pozitrona osniva s jedne strane na uvođenju četverorednih kvadratskih matrica, a s druge strane na tom, da se uvedu četiri valne funkcije u račun (umjesto jedne, kako je to uveo Schrödinger). Poznato je nadalje, da te Diracove četiri valne funkcije nazivamo komponentama spinora[3].

[1] P. A. M. Dirac, Zur Quantentheorie des Elektrons, str. 91 (iz knjige: H. Falkenhagen, Quantentheorie und Chemie, 1928); P. A. M. Dirac, Die Prinzipien d. Quantenmechanik, 1930, str. 261—262.

[2] C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. London (A), 1928, str. 654 (meni nepristupačno, citirano prema: A. Haas, Theor. Phys. II, 1930, str. 369 i prema: A. Haas, Mécanique ondulatoire, 1930, str. 178—180).

[3] P. Jordan, Anschauliche Quantentheorie, 1936, str. 211.

Na osnovi zadatka ove radnje postavlja se prije svega pitanje, mogu li Diracove matrice biti osmoga reda i može li u vezi s tim spinor imati 8 komponenata. Lako se pokazuje, da kvadratske hermitske matrice osmoga reda,

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a_1+ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_1-ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_1+ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_1-ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2+ib_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_2-ib_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_2+ib_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2-ib_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{a_1+ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_1-ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_1-ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_1+ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2+ib_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2-ib_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2-ib_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2+ib_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{b_1-ia_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_1+ia_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_1-ia_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1+ia_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_2-ia_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_2+ia_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_2-ia_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_2+ia_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (2)$$

$$\alpha_4 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

gdje su a_1, a_2, b_1 i b_2 povoljni realni brojevi, zadovoljavaju Diracove uvjete (1); za kontrolu toga navodim produkte

$$\alpha_1\,\alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{(a_1+ib_1)^2}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(a_1+ib_1)^2}{a_1^2+h_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(a_2+ib_2)^2}{a_2^2+b_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(a_2+ib_2)^2}{a_2^2+b_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_2\,\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{(a_1+ib_1)^2}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(a_1+ib_1)^2}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(a_2+ib_2)^2}{a_2^2+b_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(a_2+ib_2)^2}{a_2^2+b_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_1\,\alpha_3 = \begin{Vmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3\,\alpha_1 = \begin{Vmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_2\,\alpha_3 = \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{(a_1+ib_1)(b_1-ia_1)}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(a_1-ib_1)(b_1+ia_1)}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(a_2+ib_2)(b_2-ia_2)}{a_2^2+b_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(a_2-ib_2)(b_2+ia_2)}{a_2^2+b_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3\,\alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{(b_1-ia_1)(a_1+ib_1)}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(b_1+ia_1)(a_1-ia_1)}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(b_2-ia_2)(a_2+ib_2)}{a_2^2+b_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(b_2+ia_2)(a_2-ib_2)}{a_2^2+b_2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{Vmatrix}$$

dok je kontrola produkata prvih triju matrica sa četvrtom tako lagana, da je ovdje ne navodim. Može se primijetiti, da prve tri matrice (2) prelaze u matrice četvrtog reda, ako je $a_2 = b_2 = 0$.[4] Diracove linearne diferencijalne jednadžbe, koje tim matricama odgovaraju, ako uvedemo osam valnih funkcija Ψ_β ($\beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$), dakle u smislu proširenja dosadanje definicije, t. zv. spinor sa 8 komponenata, glase za električki nabitu česticu u elektromagnetskom polju, pošto uvedemo u račun poznate operatore

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c}A_x \equiv P_1, \quad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\varepsilon}{c}A_y \equiv P_2,$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c}A_z \equiv P_3, \quad -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c}V \equiv P_4$$

(h je Planckova konstanta, π Ludolfov broj, i imaginarna jedinica, ε naboj čestice bez obzira na predznak, A_x, A_y i A_z su komponente vektorpotencijala $\vec{A}$ izvanjega elektromagnetskoga polja, dok je V skalarni potencijal izvanjega električnog polja, m_0 masa čestice u stanju mirovanja)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}}\left[(a_{1,2}+ib_{1,2})(P_1\Psi_{4\,8}+P_2\Psi_{3,7})+(b_{1,2}-ia_{1,2})P_3\Psi_{4\,8}\right]+ \\
&\qquad +(P_4-m_0c)\Psi_{1\,5}=0 \\
&\frac{1}{\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}}\left[-(a_{1,2}-b_{1\,2})(P_1\Psi_{3\,7}-P_2\Psi_{4,8})-(b_{1,2}+ia_{1,2})P_3\Psi_{3,7}\right]+ \\
&\qquad +(P_4-m_0c)\Psi_{2,6}=0 \\
&\frac{1}{\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}}\left[-(a_{1,2}+ib_{1,2})P_1\Psi_{2,6}+(a_{1,2}-ib_{1,2})P_2\Psi_{1\,5}-(b_{1,2}-ia_{1,2})P_3\Psi_{2,6}\right]+ \\
&\qquad +(P_4+m_0c)\Psi_{3\,7}=0 \\
&\frac{1}{\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}}\left[(a_{1,2}-ib_{1\,2})P_1\Psi_{1,5}+(a_{1,2}+ib_{1\,2})P_2\Psi_{2,6}+(b_{1,2}+ia_{1,2})P_3\Psi_{1,5}\right]+ \\
&\qquad +(P_4+m_0c)\Psi_{4\,8}=0.
\end{aligned} \tag{3}$$

[4] Primijetiti valja još, da s ovako napisanim matricama četvrtog reda (sa četiri elementa različita od 0) nijesu iscrpene sve mogućnosti Diracovih matrica četvrtog reda sa četiri od nule različita elementa, (sve kad bi se i radilo točno o obliku, kakav je dan gore spomenutim matricama); za dokaz toga mogu se navesti ove matrice:

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&i&0 \\ 0&-i&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-i \\ 1&0&0&0 \\ 0&i&0&0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{Vmatrix} 0&0&0&i \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ -i&0&0&0 \end{Vmatrix} \quad \left(\text{uz } \alpha_4 = \begin{Vmatrix} -1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{Vmatrix}\right)$$

U svim ovim jednadžbama, gdje se nalaze naznačena 2 indeksa, valja uzeti ili prvi ili drugi indeks; na taj način imamo pod (3) zapravo osam jednadžbi (mjesto četiri, kao dosada). Iz ovih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvoga reda možemo dobiti lako osam parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda; kao primjer ćemo navesti ovaj: ako na prvu jednadžbu primijenimo (sprijeda) operator $P_4 + m_0 c$, na treću operator

$$-\frac{a_{1,2}+ib_{1,2}}{\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}}\,P_2,$$

a na četvrtu

$$\frac{-1}{\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}}\,[(a_{1,2}+ib_{1,2})\,P_1+(b_{1,2}-ia_{1,2})\,P_3],$$

dobivamo

$$\begin{aligned}&(P_4^2-P_1^2-P_2^2-P_3^2-m_0^2c^2)\,\Psi_{1,5}-\frac{(a_{1,2}+ib_{1,2})^2}{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}\,(P_1P_2-P_2P_1)\,\Psi_{2,6}+\\&+\frac{(a_{1,2}+ib_{1,2})(b_{1,2}-ia_{1,2})}{a_1^2+b_1^2}\,(P_2P_3-P_3P_2)\,\Psi_{2,6}+i\,(P_3P_1-P_1P_3)\,\Psi_{1,5}+\\&+\frac{a_{1,2}+ib_{1,2}}{\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}}\,[(P_4P_1-P_1P_4)\,\Psi_{4,8}+(P_4P_2-P_2P_4)\,\Psi_{3,7}]+\\&+\frac{b_{1,2}-ia_{1,2}}{\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}}\,(P_4P_3-P_3P_4)\,\Psi_{4,8}=0,\end{aligned}\tag{4}$$

dakle zapravo opet dvije jednadžbe, jer svuda (t. j. u čitavoj jednadžbi) tamo, gdje su naznačena dva indeksa, valja upotrijebiti ili prvi ili drugi indeks. Analogno bismo dobili ostalih šest jednadžbi, tako da odavle razabiramo, da bismo na taj način imali ukupno osam jednadžbi. Iz izraza $P_\beta P_\gamma - P_\gamma P_\beta$ ($\beta, \gamma = 1, 2, 3$; $\gamma \neq \beta$) i $P_4 P_\beta - P_\beta P_4$ ($\beta = 1, 2, 3$), koji dolaze u (4), razabiramo, na osnovi onoga, što je dosad poznato[5], da nam u jednadžbi dolaze u drugoj približnosti oni izrazi, koji poređenjem sa Schrödingerovom jednadžbom daju dodatke energiji zbog magnetskog ili električnog momenta elektrona u izvanjem (elektromagnetskom) polju.

[5] A. Haas, Mécanique ondulatoire, 1930, str. 180; A. Haas, Theor. Phys. II, 1930, str. 369; C. Schaefer, Theor. Phys. III-2, 1937, str. 465—466.

Preostaje samo još, da se na osnovi jednadžbi (3) istraži statistička gustoća naboja i statistička gustoća električne struje. U tu svrhu trebalo bi da napišemo jednadžbama (3) konjugirano-kompleksne jednadžbe i zatim da jednadžbe (3) množimo redom s konjugirano-kompleksnim komponentama $\overset{*}{\Psi}_{1,5}, \overset{*}{\Psi}_{2,6}, \overset{*}{\Psi}_{3,7}$ i $\overset{*}{\Psi}_{4,8}$ spinora i sve skupa zbrojimo, a spomenute konjugirano-kompleksne jednadžbe da množimo redom s komponentama $\Psi_{1,5}, \Psi_{2,6}, \Psi_{3,7}$ i $\Psi_{4,8}$ spinora i tako pomnožene da zbrojimo, a onda drugi zbroj da pribrojimo k prvomu; dobili bismo nakon računa, koji se ovdje izostavljaju, jer su posve analogni onima, koji su poznati[6] već iz slučaja spinora sa četiri komponente, jednadžbu analognu jednadžbi kontinuiteta, iz koje bismo odmah razabrali ove izraze kao izraze za statističku gustoću električnog naboja i za komponente statističke gustoće električne struje

$$\varrho = \varepsilon \sum_{\beta=1}^{8} \overset{*}{\Psi}_\beta\,\Psi_\beta,$$

$$\begin{aligned}j_x &= \varepsilon c\left\{\frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\left[(a_1+ib_1)\,(\overset{*}{\Psi}_1\Psi_4-\overset{*}{\Psi}_3\Psi_2)-(a_1-ib_1)\,(\overset{*}{\Psi}_2\Psi_3-\overset{*}{\Psi}_4\Psi_1)\right]+\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left[(a_2+ib_2)\,(\overset{*}{\Psi}_5\Psi_8-\overset{*}{\Psi}_7\Psi_6)-(a_2-ib_2)\,(\overset{*}{\Psi}_6\Psi_7-\overset{*}{\Psi}_8\Psi_5)\right]\right\},\\j_y &= \varepsilon c\left\{\frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\left[(a_1+ib_1)\,(\overset{*}{\Psi}_1\Psi_3+\overset{*}{\Psi}_4\Psi_2)+(a_1-ib_1)\,(\overset{*}{\Psi}_2\Psi_4+\overset{*}{\Psi}_3\Psi_1)\right]+\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left[(a_2+ib_2)\,(\overset{*}{\Psi}_5\Psi_7+\overset{*}{\Psi}_8\Psi_6)+(a_2-ib_2)\,(\overset{*}{\Psi}_6\Psi_8+\overset{*}{\Psi}_7\Psi_5)\right]\right\},\\j_z &= \varepsilon c\left\{\frac{1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\left[(b_1-ia_1)\,(\overset{*}{\Psi}_1\Psi_4-\overset{*}{\Psi}_3\Psi_2)-(b_1+ia_1)\,(\overset{*}{\Psi}_2\Psi_3-\overset{*}{\Psi}_4\Psi_1)\right]+\right.\\&\left.+\frac{1}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left[(b_2-ia_2)\,(\overset{*}{\Psi}_5\Psi_8-\overset{*}{\Psi}_7\Psi_6)-(b_2+ia_2)\,(\overset{*}{\Psi}_6\Psi_7-\overset{*}{\Psi}_8\Psi_5)\right]\right\}.\end{aligned}\tag{5}$$

Na osnovi svega toga razabiramo, da kod ove (druge) metode nema zapreke proširenju Diracove teorije elektrona i pozitrona na osam komponenata spinora pomoću matrica osmoga reda, te je Diracovo rješenje primjenom spinora sa četiri

[6] L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, str. 158.

komponente samo najjednostavniji slučaj rješenja. U svojoj suštini ova (druga, Darwinova) metoda zapravo je identična s prvom metodom, pa prema tome nema nikakove zapreke, da kod prve (Diracove) metode zamišljamo matrice osmoga reda.

2. Metoda valnoga paketa

Treća metoda za izračunavanje magnetskoga momenta elektrona i pozitrona jest ona pomoću Darwinova valnoga paketa[7], pak se stoga sada postavlja pitanje, postoji li mogućnost proširenja ove metode primjenom matrica osmoga reda na spinor sa osam komponenata. Da se to istraži, potrebno je, kako je poznato, u tu svrhu napisati Diracove jednadžbe prema matricama (2) odnosno kao specijalni slučaj jednadžbi (3), ako se čestica ne nalazi u izvanjem elektromagnetskom polju; to daje

$$
\begin{aligned}
&\frac{h}{2\pi i\sqrt{a_{12}^2+b_{12}^2}}\left\{(a_{12}+ib_{1.2})\left(\frac{\partial\Psi_{48}}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_{37}}{\partial y}\right)+\right.\\
&\left.+(b_{12}-ia_{12})\frac{\partial\Psi_{4.8}}{\partial z}\right\}-m_0c\Psi_{1,5}+\frac{h}{2\pi ic}\frac{\partial\Psi_{1.5}}{\partial t}=0,\\
&\frac{h}{2\pi i\sqrt{a_{1,2}^2+b_{12}^2}}\left\{-(a_{1.2}-ib_{12})\left(\frac{\partial\Psi_{37}}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_{4.8}}{\partial y}\right)-\right.\\
&\left.-(b_{12}+ia_{12})\frac{\partial\Psi_{37}}{\partial z}\right\}-m_0c\Psi_{26}+\frac{h}{2\pi ic}\frac{\partial\Psi_{2.6}}{\partial t}=0,\\
&\frac{h}{2\pi i\sqrt{a_{12}^2+b_{12}^2}}\left\{-(a_{1.2}+ib_{12})\cdot\frac{\partial\Psi_{26}}{\partial x}+(a_{1.2}-ib_{1,2})\frac{\partial\Psi_{15}}{\partial y}-\right.\\
&\left.-(b_{1,2}-ia_{12})\frac{\partial\Psi_{26}}{\partial z}\right\}+m_0c\Psi_{3,7}+\frac{h}{2\pi ic}\frac{\partial\Psi_{37}}{\partial t}=0,\\
&\frac{h}{2\pi i\sqrt{a_{12}^2+b_{1,2}^2}}\left\{(a_{12}-ib_{12})\frac{\partial\Psi_{15}}{\partial x}+(a_{12}+ib_{12})\frac{\partial\Psi_{26}}{\partial y}+\right.\\
&\left.+(b_{12}+ia_{12})\frac{\partial\Psi_{15}}{\partial z}\right\}+m_0c\Psi_{48}+\frac{h}{2\pi ic}\frac{\partial\Psi_{48}}{\partial t}=0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

[7] L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, str. 167—179; C. Schaefer, Theor. Phys. III-2, 1937, str. 468—474.

Ako sada iz prve dvije jednadžbe izrazimo u Newtonovoj približnosti Ψ_1 i Ψ_2 pomoću Ψ_3 i Ψ_4, odnosno Ψ_5 i Ψ_6 pomoću Ψ_7 i Ψ_8, a onda $\Psi_{3,4}$ i Ψ_{78} pomoću Darwinova valnoga paketa ($p_{x,\,y,\,z}$ su komponente impulza, U energija, a R »praktički« polumjer čestice)

$$
\Psi_{3,4,7,8}=A_{3,4,7,8}\,e^{-\frac{(x-v_x t)^2+(y-v_y t)^2+(z-v_z t)^2}{2R^2}}\,e^{\frac{2\pi i}{h}(p_x x+p_y y+p_z z-Ut)}
$$

koji uzmemo za čas $t=0$ i tako dobivene izraze za Ψ_β ($\beta=1,2,3,4,5,6,7,8,$) uvrstimo u (5), dobivamo kao komponente statičke gustoće električne struje

$$
\begin{aligned}
j_x&=\left\{(\overset{*}{A}_3A_3+\overset{*}{A}_4A_4+\overset{*}{A}_7A_7+\overset{*}{A}_8A_8)\,\varepsilon v_x+\right.\\
&+\frac{\varepsilon h}{4\pi m_0}\left[i(\overset{*}{A}_3A_4+\overset{*}{A}_7A_8-\overset{*}{A}_4A_3-\overset{*}{A}_8A_7)\frac{\partial}{\partial y}-\right.\\
&\left.\left.-(\overset{*}{A}_4A_4+\overset{*}{A}_8A_8-\overset{*}{A}_3A_3-\overset{*}{A}_7A_7)\frac{\partial}{\partial z}\right]\right\}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}\\
j_y&=\left\{(\overset{*}{A}_3A_3+\overset{*}{A}_4A_4+\overset{*}{A}_7A_7+\overset{*}{A}_8A_8)\,\varepsilon v_y+\right.\\
&+\frac{\varepsilon h}{4\pi m_0}\left[(-\overset{*}{A}_3A_4-\overset{*}{A}_7A_8-\overset{*}{A}_4A_3-\overset{*}{A}_8A_7)\frac{\partial}{\partial z}-\right.\\
&\left.\left.-i(\overset{*}{A}_3A_4+\overset{*}{A}_7A_8-\overset{*}{A}_4A_3-\overset{*}{A}_8A_7)\frac{\partial}{\partial x}\right]\right\}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}\\
j_z&=\left\{(\overset{*}{A}_3A_3+\overset{*}{A}_4A_4+\overset{*}{A}_7A_7+\overset{*}{A}_8A_8)\,\varepsilon v_z+\right.\\
&+\frac{\varepsilon h}{4\pi m_0}\left[(\overset{*}{A}_4A_4+\overset{*}{A}_8A_8-\overset{*}{A}_3A_3-\overset{*}{A}_7A_7)\frac{\partial}{\partial x}-\right.\\
&\left.\left.-(-\overset{*}{A}_3A_4-\overset{*}{A}_7A_8-\overset{*}{A}_4A_3-\overset{*}{A}_8A_7)\frac{\partial}{\partial y}\right]\right\}e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

a kao statističku gustoću električnog naboja čestice (izostavivši $\overset{*}{\Psi}_1\Psi_1+\overset{*}{\Psi}_2\Psi_2+\overset{*}{\Psi}_5\Psi_5+\overset{*}{\Psi}_6\Psi_6$ radi neznatnosti)

$$
\varrho=\varepsilon\,(\overset{*}{A}_3A_3+\overset{*}{A}_4A_4+\overset{*}{A}_7A_7+\overset{*}{A}_8A_8)\;e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}.
$$

Definiramo li sada pomoću jednadžbi

$$\frac{1}{4\pi} J_x = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c} (-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_7 A_8 - \overset{*}{A}_4 A_3 - \overset{*}{A}_8 A_7)\ e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}},$$

$$\frac{1}{4\pi} J_y = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c} (\overset{*}{A}_4 A_4 + \overset{*}{A}_8 A_8 - \overset{*}{A}_3 A_3 - \overset{*}{A}_7 A_7)\ e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}},$$

$$\frac{1}{4\pi} J_z = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c} i (\overset{*}{A}_3 A_4 + \overset{*}{A}_7 A_8 - \overset{*}{A}_4 A_3 - \overset{*}{A}_8 A_7)\ e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}$$

vektor $\vec{I}$, onda dobivamo uz obzir na jednu formulu elektromagnetizma

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{J}\, d\tau,$$

gdje je $\vec{I}$ t. zv. magnetička polarizacija ($\frac{1}{4\pi}\vec{I}$ je magnetski momenat jedinice volumena), ovaj sustav jednadžbi:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c} (-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_7 A_8 - \overset{*}{A}_4 A_3 - \overset{*}{A}_8 A_7) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} d\tau$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c} (\overset{*}{A}_4 A_4 + \overset{*}{A}_8 A_8 - \overset{*}{A}_3 A_3 - \overset{*}{A}_7 A_7) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} d\tau \qquad (8)$$

$$\mathfrak{M}_z = \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0 c} i (\overset{*}{A}_3 A_4 + \overset{*}{A}_7 A_8 - \overset{*}{A}_4 A_3 - \overset{*}{A}_8 A_7) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} d\tau,$$

a tu se integrali protežu na čitav prostor. Ako sada još na osnovi jednadžbe za gustoću ϱ vjerojatnosti provedemo normiranje putem integrala $\int \varrho d\tau = \varepsilon$, onda iz (8) izlazi kao apsolutna vrijednost magnetskoga momenta elektrona i pozitrona (označivši ujedno $|\varepsilon| = e$)

$$|\mathfrak{M}| = \frac{eh}{4\pi m_0 c} \cdot \frac{1}{\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4 + \overset{*}{A}_7 A_7 + \overset{*}{A}_8 A_8} \Big| \Big\{ \overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4 +$$

$$+ \overset{*}{A}_7 A_7 + \overset{*}{A}_8 A_8 + 2\overset{*}{A}_3 \overset{*}{A}_4 A_3 A_4 + 2\overset{*}{A}_3 \overset{*}{A}_8 (2 A_4 A_7 - A_3 A_8) + \qquad (9)$$

$$+ 2\overset{*}{A}_4 \overset{*}{A}_7 (2 A_3 A_8 - A_4 A_7) + 2\overset{*}{A}_4 \overset{*}{A}_8 A_4 A_8 + 2\overset{*}{A}_3 \overset{*}{A}_7 A_3 A_7 +$$

$$+ 2\overset{*}{A}_7 \overset{*}{A}_8 A_7 A_3 \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big|$$

gdje izraz pod korijenom postaje jednak kvadratu nazivnika, ako postavimo $A_4 A_7 = A_3 A_8$, dakle

$$\frac{A_7}{A_8} = \frac{A_3}{A_4} \qquad (10)$$

To znači: ako su amplitude sedme i osme valne funkcije proporcionalne amplitudi treće i četvrte valne funkcije, onda nam jednadžba (9) daje iznos magnetskog momenta elektrona ili pozitrona. Ali u tom slučaju proširenje ove (treće) metode (primjenom valnoga paketa) na matrice osmoga reda i s tim u vezi na osam komponenata spinora postaje suvišna komplikacija izvođenja, jer u stvari imamo četiri valne funkcije (četiri komponente spinora), koje se ponavljaju. Čini se prema tome, da je spinor sa četiri komponente onaj, koji ima fizikalno značenje, što se tiče rješavanja magnetskog momenta elektrona i pozitrona; u svakom slučaju ovakav spinor, kako pokazuje metoda valnoga paketa, ima za rješenje problema elektrona i pozitrona neko osnovno značenje.

Proširenje pak Diracove teorije na spinor sa osam komponenata kod druge (Darwinove) metode, koje je ovdje naprijed izloženo, jeste sasvim matematska stvar, jer se kod te metode u stvari radi o konstrukciji diferencijalnih jednadžbi drugog reda iz Diracovih jednadžbi prvog reda.

3. Problem neutrona

Čini se, da se ovakvim proširenjem metode valnog paketa može riješiti problem magnetskog momenta neutrona i protona[8]. Iz relacije (10) izlazi naime, da samo amplitude sedme i osme valne funkcije treba da budu proporcionalne amplitudama treće i četvrte valne funkcije; prema tomu, ako se, dakako, ne radi o elektronu ili pozitronu, faktori ili funkcije propagacije vala ne bi baš morali biti identični kao u slučaju elektrona i pozitrona. Međutim prije prijelaza na sam problem neutrona valja reći, da je već Dirac[9] primijetio, da se konjugirano-kompleksna jednadžba (ili konjugirano kompleksne jednadžbe) od postavljene jednadžbe za gibanje elementarne

[8] Pretpostavljamo, da oba nukleona (proton, neutron) kao elementarne čestice zadovoljuju Diracove jednadžbe (L. de Broglie, La théorie du noyau, II, 1945, str. 83). — Objašnjenje magnetskog momenta, koje je za oba nukleona dao Wick (isp.: L. de Broglie, La théorie du noyau, II, 1945, str. 137—139) teško bi se moglo prihvatiti zbog pregrubih rezultata.

[9] P. A. M. Dirac, Die Prinzipien d. Quantenmechanik, 1930, str. 270.

čestice u elektromagnetskom polju dobije (uz izvjesne pretpostavke o matricama, t. j., da su prve tri matrice realne, a četvrta imaginarna) i na taj način, da se u postavljenoj jednadžbi izvrne predznak naboja čestice. To znači: ako u postavljenim jednadžbama promijenimo predznak naboja čestice, dakle prijeđemo od elektrona na pozitron ili obrnuto, onda tako dobivene jednadžbe zadovoljavaju konjugirano-kompleksna rješenja valnih funkcija. Ali ovako dobivene jednadžbe mogu se dobiti iz postavljenih jednadžbi i na taj način, da postavljenim jednadžbama naprosto napišemo konjugirano-kompleksne jednadžbe.

Na taj se način može pokazati u nauci već poznata stvar, da se negativni elektron uz negativnu energiju vlada u elektromagnetskomu polju tako kao pozitivni elektron uz pozitivnu energiju[10].

Međutim konjugirano-kompleksne jednadžbe k postavljenim jednadžbama elektrona ravnopravne su postavljenima, t. j. vrijede za istu česticu, te ih stoga upotrebljavamo u izvođenju jednadžbe analogne jednadžbi kontinuiteta.

Posljedica je svega toga, da je D i r a c o v a teorija simetrična s obzirom na elektron i pozitron[11], što znači, da je predznak koji pripisujemo naboju čestice u odnosu prema energiji, zapravo konvencija. Još bolje razabrat će se to iz daljih redaka.

Odaberemo li za dalja razmatranja prve tri matrice (α_1, α_2 i α_3) pod (2) i kombiniramo li ih s matricom α_4, koju pišemo ovako:

$$\alpha_4 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \tag{11}$$

[10] Vidi i: A. S o m m e r f e l d, Atombau u. Spektrallinien, II, 1939, str. 312.

[11] P. A. M. D i r a c, Die Prinzipien d. Quantenmechanik, 1930, str. 271; G. W e n t z e l, Die Physik in regelm. Berichten, 7, 1939, str. 2.

S ovako promijenjenim matricama napisat ćemo sada D i r a c o v e jednadžbe za slučaj čestice izvan elektromagnetskog polja, jedino s tom razlikom, da ćemo prvu grupu jednadžbi (za prva četiri retka matrica) napisati za pozitivnu energiju, drugu grupu jednadžbi (za posljednja četiri retka matrica) za negativnu energiju čestice; u tom slučaju su i komponente impulza te čestice negativne[12]. To nas ne smije zavesti u bludnju, kao da bi onda »ukupna« energija čestice bila jednaka nuli, jer je već istaknuto, da se pozitron u elektromagnetskom polju uz pozitivnu energiju vlada baš kao i negativni elektron u istom polju uz negativnu energiju. Tako od spomenutih osam jednadžbi prve četiri identične su s jednadžbama pod (6), jedino s tom razlikom, da sada pišemo M_n (masa neutrona u stanju mirovanja) mjesto m_0; druge četiri glase:

$$\begin{aligned}
&-\frac{h}{2\pi i\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left\{(a_2+ib_2)\left(\frac{\partial\Psi_8}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_7}{\partial y}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+(b_2-ia_2)\frac{\partial\Psi_8}{\partial z}\right\}+M_n c\,\Psi_5-\frac{h}{2\pi ic}\frac{\partial\Psi_5}{\partial t}=0\\
&-\frac{h}{2\pi i\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left\{(a_2-ib_2)\left(-\frac{\partial\Psi_7}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_8}{dy}\right)-\right.\\
&\qquad\left.-(b_2+ia_2)\frac{\partial\Psi_7}{\partial z}\right\}+M_n c\,\Psi_6-\frac{h}{2\pi ic}\frac{\partial\Psi_6}{\partial t}=0\\
&-\frac{h}{2\pi i\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left\{-(a_2+ib_2)\frac{\partial\Psi_6}{\partial x}+(a_2-ib_2)\frac{\partial\Psi_5}{\partial y}-\right.\\
&\qquad\left.-(b_2-ia_2)\frac{\partial\Psi_6}{\partial z}\right\}-M_n c\,\Psi_7-\frac{h}{2\pi ic}\frac{\partial\Psi_7}{\partial t}=0\\
&-\frac{h}{2\pi i\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left\{(a_2-ib_2)\frac{\partial\Psi_5}{\partial x}+(a_2+ib_2)\frac{\partial\Psi_6}{\partial y}+\right.\\
&\qquad\left.+(b_2+ia_2)\frac{\partial\Psi_5}{\partial z}\right\}-M_n c\,\Psi_8-\frac{h}{2\pi ic}\frac{\partial\Psi_8}{\partial t}=0.
\end{aligned}\tag{12}$$

Množimo li međutim ove jednadžbe s —1, prelaze one u drugu grupu jednadžbi (6) i vrijede prema tome za elektron (uz pozitivnu energiju), ali prema ovom izvodu ovdje (jer su postavljene za negativnu energiju) vrijede za pozitron, pak odatle razabiramo:

[12] H. D ä n z e r, Grundl. d. Quantenmechanik, 1935, str. 139; L. d e B r o g l i e, La théorie du noyau, II, 1945, str. 34.

1. da bi nas jednadžbe (12) zbog identiteta s drugom grupom jednadžbi (6) poznatim postupkom[13] dovele do jednadžbi (5),

2. da u jednadžbama (5) načelno ipak ne možemo ništa tvrditi o predznaku elementarnoga naboja ε, te možemo stoga u njima pisati mjesto ε njegovu apsolutnu vrijednost e, i

3. da možemo pokušati predznak naboja u jednadžbama (5) odrediti zgodnim izborom valnih funkcija.

Prije prijelaza na izbor valnih funkcija, koji će nas dovesti do magnetskog momenta neutrona, rastavit ćemo jednadžbe za komponente statističke gustoće struje po apsolutnom iznosu električnog naboja[14] iz (5) na dva dijela

$$j'_x = \frac{2ec}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\left[(a_1+ib_1)\,(\overset{*}{\Psi}_1\Psi_4-\overset{*}{\Psi}_3\Psi_2)+\right.$$
$$\left.+\,(a_1-ib_1)\,(-\overset{*}{\Psi}_2\Psi_3+\overset{*}{\Psi}_4\Psi_1)\right]$$

$$j'_y = \frac{2ec}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\left[(a_1+ib_1)\,(\overset{*}{\Psi}_1\Psi_3+\overset{*}{\Psi}_4\Psi_2)+\right.$$
$$\left.+\,(a_1-ib_1)\,(\overset{*}{\Psi}_2\Psi_4+\overset{*}{\Psi}_3\Psi_1)\right] \qquad (e=|\varepsilon|) \qquad (13a)$$

$$j'_z = \frac{2ec}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\left[(b_1+ia_1)\,(\overset{*}{\Psi}_4\Psi_1-\overset{*}{\Psi}_2\Psi_3)+\right.$$
$$\left.+\,(b_1-ia_1)\,(\overset{*}{\Psi}_1\Psi_4-\overset{*}{\Psi}_3\Psi_2)\right]$$

$$j''_x = \frac{2ec}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left[(a_2+ib_2)\,(\overset{*}{\Psi}_5\Psi_8-\overset{*}{\Psi}_7\Psi_6)+\right.$$
$$\left.+\,(a_2-ib_2)\,(-\overset{*}{\Psi}_6\Psi_7+\overset{*}{\Psi}_8\Psi_5)\right]$$

$$j''_y = \frac{2ec}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left[(a_2+ib_2)\,(\overset{*}{\Psi}_5\Psi_7+\overset{*}{\Psi}_8\Psi_6)+\right.$$
$$\left.+\,(a_2-ib_2)\,(\overset{*}{\Psi}_6\Psi_8+\overset{*}{\Psi}_7\Psi_5)\right] \qquad (e=|\varepsilon|) \qquad (13b)$$

$$j''_z = \frac{2ec}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\left[(b_2+ia_2)\,(\overset{*}{\Psi}_8\Psi_5-\overset{*}{\Psi}_6\Psi_7)+\right.$$
$$\left.+\,(b_2-ia_2)\,(\overset{*}{\Psi}_5\Psi_8-\overset{*}{\Psi}_7\Psi_6)\right]$$

[13] Vidi na pr.: C. Schaefer, Theor. Phys., III-2, 1937, str. 457.

[14] Da se čestici može pripisati višestruk naboj elektrona (po apsolutnoj vrijednosti), znamo iz teorije mezona (L. de Broglie, La théorie du noyau, II, 1945, str. 64).

koje prema zaključku, navedenom pod 2 i prema onomu što je postavljeno pod 3 pišemo s apsolutnim iznosom $2e$ naboja čestice, kao da neutronu pripisujemo (po apsolutnom iznosu) dvostruki elementarni naboj $2e$. To nije čudno, kad znamo, da danas u nauci prevladava shvatanje, da se neutron može (uz izvjesne uvjete) raspasti na dvije čestice s protivnim elementarnim nabojima, t. j. na pozitivni proton i na negativni mezon. Jedino bi se ovdje moglo pitati, zašto radimo s apsolutnim, a ne s algebarskim iznosom naboja neutrona. Možda nam neki putokaz u odgovoru na to pitanje daje barem donekle već spomenuta simetrija Diracove teorije prema protivnim nabojima kod elektrona i pozitrona, a donekle možda i Breit-Condon-Presentova hipoteza[15], po kojoj nuklearne sile ne zavise od parametra naboja (pa prema tome ni od predznaka naboja).

Nadalje je potrebno, da se prije odabiranja valnih paketa pokaže, da čestici možemo pripisati i takav de Broglie-jev fazni ili fiktivni val, koji se opisuje takvom formulom, da nam se čini, kao da se širi smjerom protivnim smjeru gibanja čestice. Po L. de Broglie-u[15a] pripada nutarnjem periodičkom pojavu »mirne« čestice izvjesna frekvenca, koju označimo na pr. s ν_0; u tom slučaju pripada istom tom pojavu kod čestice u gibanju (za mirnog motrioca) frekvenca

$$\nu_1 = \nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(v je brzina čestice s obzirom na motrioca). S druge pak strane određena je frekvenca faznog (fiktivnog) vala, za koji pomišljamo da pripada čestici, izrazom

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Po de Broglie-u postoji kod gibanja čestice u svakoj točki sklad faze ($e^{i\Phi}$) fiktivnog vala i faze ($e^{i\Phi_1}$) nutarnjeg periodičkog pojava čestice ($e^{i\Phi} = e^{i\Phi_1}$).

Giba li se čestica na pr. u pozitivnom smjeru koordinatne osi x i pretpostavimo li, da je u času $t=0$ i na mjestu

[15] G. Breit, E. Condon and R. D. Present, The Physical Review, 50, 1936, str. 825—845. — La théorie du noyau, II, 1943, str. 178—179.

[15a] L. de Broglie, Comptes Rendus 177 (1923), str. 507—510.

$x = 0$ .... $\Phi = 0$ i $\Phi_1 = 0$, onda je u času $t > 0$ u ishodištu valno stanje dano s $2\pi\nu t$, dok je u točki $x > 0$ ono valno stanje, koje će iza vremena $\frac{x}{u}$ biti u ishodištu, dakle

$$\Phi = 2\pi\nu\left(t + \frac{x}{u}\right) .$$

(u je brzina faznog ili fiktivnog vala). Za nutarnji pak periodički pojav čestice bit će u času $t = \frac{x}{v}$ na mjestu x faza dana s

$$\Phi_1 = 2\pi\nu_1 t = 2\pi\nu_1 \frac{x}{v} .$$

Sklad faza traži

$$2\pi\nu\left(t + \frac{x}{u}\right) = 2\pi\nu_1 \frac{x}{v} ,$$

dakle

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{v}\frac{\nu_1}{\nu} = \frac{1}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ili

$$u = -\frac{c^2}{v} .$$

Ako sada u skladu s ovim što je upravo rečeno i u skladu s relacijom (10) odaberemo valne funkcije u obliku D a r w i n o v i h valnih paketa

$$\Psi_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{3,4}\, e^{-\frac{(x+v_x t)^2 + (y+v_y t)^2 + (z+v_z t)^2}{2R_n^2}} e^{-\frac{2\pi i}{h}(Ut + p_x x + p_y y + p_z z)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} A_{3,4}\, P' \qquad (14a)$$

$$\Psi_{7,8} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{3\,4}\, e^{-\frac{(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2}{2R_n^2}} e^{-\frac{2\pi i}{h}(Ut - p_x x - p_y y - p_z z)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} A_{3,4}\, P'' \qquad (14b)$$

gdje nam R_n označuje »praktičko« proširenje valnog paketa nove čestice, a onda iz prvih dviju jednadžbi (6) i iz prvih dviju jednadžbi (12) izračunamo $\Psi_{1,2}$ i $\Psi_{5,6}$ (u N e w t o n o v o j približnosti), dobivamo (za $t = 0$) »malene« komponente prvog i drugog spinora:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, M_n c \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left\{ -(a_1 + ib_1)(A_4 p_x + A_3 p_y) - (b_1 - ia_1) A_4 p_z + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{-(b_1 - ia_1)(A_4 x + A_3 y) + (a_1 + ib_1) A_4 z}{R_n^2} \right\} P'$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, M_n c \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left\{ (a_1 - ib_1)(A_3 p_x - A_4 p_y) + (b_1 + ia_1) A_3 p_z + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{(b_1 + ia_1)(-A_3 x + A_4 y) + (a_1 - ib_1) A_3 z}{R_n^2} \right\} P' \qquad (15a)$$

$$\Psi_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, M_n c \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \left\{ (a_2 + ib_2)(A_4 p_x + A_3 p_y) + (b_2 - ia_2) A_4 p_z + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{-(b_2 - ia_2)(A_4 x + A_3 y) + (a_1 + ib_1) A_4 z}{R_n^2} \right\} P''$$

$$\Psi_6 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, M_n c \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \left\{ (a_2 - ib_2)(-A_3 p_x + A_4 p_y - (b_2 + ia_2) A_3 p_z + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{(b_2 + ia_2)(-A_3 x + A_4 y) + (a_2 - ib_2) A_3 z}{R_n^2} \right\} P'' \qquad (15b)$$

Ovima konjugirano-kompleksne komponente glase

$$\overset{*}{\Psi}_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, M_n c \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left\{ -(a_1 - ib_1)(\overset{*}{A}_4 p_x + \overset{*}{A}_3 p_y) - (b_1 + ia_1) \overset{*}{A}_4 p_z + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{-(b_1 + ia_1)(\overset{*}{A}_4 x + \overset{*}{A}_3 y) + (a_1 - ib_1) \overset{*}{A}_4 z}{R_n^2} \right\} \overset{*}{P}'$$

$$\overset{*}{\Psi}_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, M_n c \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \left\{ (a_1 + ib_1)(\overset{*}{A}_3 p_x - \overset{*}{A}_4 p_y) + (b_1 - ia_1) \overset{*}{A}_3 p_z + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{(b_1 - ia_1)(-\overset{*}{A}_3 x + \overset{*}{A}_4 y) + (a_1 + ib_1) \overset{*}{A}_3 z}{R_n^2} \right\} \overset{*}{P}' \qquad (15c)$$

$$\overset{*}{\Psi}_5 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, M_n c \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \left\{ (a_2 - ib_2)(\overset{*}{A}_4 p_x + \overset{*}{A}_3 p_y) + (b_2 + ia_2) \overset{*}{A}_4 p_z + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{-(b_2 + ia_2)(\overset{*}{A}_4 x + \overset{*}{A}_3 y) + (a_2 - ib_2) \overset{*}{A}_4 z}{R_n^2} \right\} \overset{*}{P}'$$

$$\overset{*}{\Psi}_6 = \frac{1}{2\sqrt{2}\, M_n c \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \left\{ (a_2 + ib_2)(-\overset{*}{A}_3 p_x + \overset{*}{A}_4 p_y) - (b_2 - ia_2) \overset{*}{A}_4 p_z + \right.$$
$$\left. + \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{(b_2 - ia_2)(-\overset{*}{A}_3 x + \overset{*}{A}_4 y) + (a_2 + ib_2) \overset{*}{A}_3 z}{R_n^2} \right\} \overset{*}{P}' \qquad (15d)$$

Uvrstimo li izraze iz (14a), (15a) i (15b) u (13a), dobivamo ove dijelove komponenata statističke gustoće električne struje, izračunane prema apsolutnom iznosu električnog naboja čestice u (13a)

$$j_x' = \left\{ -(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_x + \frac{eh}{4\pi M_n} \left[i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial y} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - (\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3) \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}}$$

$$j_y' = \left\{ -(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_y + \frac{eh}{4\pi M_n} \left[(-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial z} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial x} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}} \qquad (16a)$$

$$j_z' = \left\{ -(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_z + \frac{eh}{4\pi M_n} \left[(\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3) \frac{\partial}{\partial x} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - (-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial y} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}}$$

Supstitucija pak izraza (14b), (15b) i (15d) u (13b) vodi na ove dijelove komponenata statističke gustoće električne struje, izračunane prema apsolutnom iznosu električnog naboja čestice u (13b)

$$j_x'' = \left\{ (\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_x + \frac{eh}{4\pi M_n} \left[i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial y} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - (\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3) \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}}$$

$$j_y'' = \left\{ (\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_y + \frac{eh}{4\pi M_n} \left[(-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial x} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial x} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}} \qquad (16b)$$

$$j_z'' = \left\{ (\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_z + \frac{eh}{4\pi M_n} \left[(\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3) \frac{\partial}{\partial x} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - (-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial y} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}}.$$

Prema tome su totalne komponente statističke gustoće električne struje u smislu jednadžbi (5), a na osnovi jednadžbi (16a) i (16b).

$$j_x = j_x' + j_x'' = 2\frac{eh}{4\pi M_n} \left[i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial y} - \right.$$
$$\left. - (\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3) \frac{\partial}{\partial z} \right] \Big\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}}$$

$$j_y = j_y' + j_y'' = 2\frac{eh}{4\pi M_n} \left[(-A_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial z} - \right. \qquad (17)$$
$$\left. - i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial x} \right] \Big\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}}$$

$$j_z = j_z' + j_z'' = 2\frac{eh}{4\pi M_n} \left[(\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3) \frac{\partial}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - (-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial y} \right] \Big\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_n^2}}.$$

Već odavle razabiramo odmah, da u tim komponentama nema gustoće vjerojatnosti za konvektivnu struju (od translacije) kao na pr. u odnosnim komponentama za elektron ili pozitron [vidi jednadžbe (7)], što znači da se čestica, opisana ovim izvodom, prikazuje izvana neutralnom. Ali čestica, opisana ovim izvodom, ima magnetski momenat, o čemu se lako možemo uvjeriti, ako izvedemo analogan račun, kao što je račun od jednadžbi (7) do jednadžbi (8) s jedinom razlikom u normiranju, a to (normiranje) izvršimo prema (integracija se proteže na čitav prostor)

$$\int |\varrho|\, d\tau = 2e\ (= 2|\varepsilon|) \qquad (18a)$$

kao da neutronu — kako je već prije spomenuto nakon jednadžbi (13b) — pripisujemo (po apsolutnom iznosu) dvostruki elementarni naboj $2e$ [16]. Prema tome jednadžba za normiranje

[16] Primijetiti valja, da je kod elektrona i pozitrona svejedno, da li izvodimo normiranje po apsolutnoj ili po algebarskoj vrijednosti naboja. Možda nije sasvim bez interesa spomenuti, da je »model« neutrona sa dva elementarna električna naboja protivnog predznaka dao F. Renner u časopisu »Die Naturwissenschaften«, god. 26, 1938, na str. 738.

valnih funkcija — s obzirom na prvu jednadžbu pod (5), koju pomislimo dakako pisanu sa $2e$ mjesto ε — imala bi da glasi:

$$\int \left(\sum_{\beta=1}^{8} \overset{*}{\Psi}_\beta \Psi_\beta \right) d\tau = 1 \tag{18b}$$

a to zbog (14a) i (14b) vodi do

$$(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\kappa_n^2}} d\tau = 1 \tag{18c}$$

Spomenutim postupkom, za koji je već naprijed rečeno da je analogan računu, kao što je račun od jednadžbi (7) do jednadžbi (8), dolazimo do apsolutnog iznosa magnetskog momenta čestice

$$|\mathfrak{M}| = 2 \frac{eh}{4\pi M_n c}, \tag{19}$$

što je, kako vidimo, dvostruk iznos t. zv. magnetona jezgre. Podatak je pak, koji je za neutron izvela eksperimentalna fizika, ovaj

$$-(2 \pm 1) \frac{eh}{4\pi M_p c}$$ [17]

ili

$$-(1{\cdot}935 \pm 0{\cdot}02) \frac{eh}{4\pi M_p c}$$ [18],

gdje M_p znači masu protona u stanju mirovanja.

Koliko god se i moglo eventualno prigovoriti[19] ovom pokušaju objašnjenja magnetskog momenta neutrona, a jedini bi manje više ozbiljniji prigovor mogao biti samo, što se tiče upotrebe apsolutnih mjesto algebarskih vrijednosti naboja čestice[20], ipak se čini, da se ovaj pokušaj ne će moći sasvim odbiti, jer je to prvo teorijsko objašnjenje onog momenta na osnovi Diracove teorije, a ono u svakom slučaju nije čudnovatije od ideje magnetizma bez elektriciteta, kako ju je za neutron nabacio Sommerfeld[21].

[17] R. Fleischmann, Die Physik in regelm. Berichten, 8, 1940, str. 22.

[18] J. Mattauch — F. Flügge, Kernphysikal. Tabellen, 1942, str. 18, 58 i 100. — L. de Broglie, La théorie du noyau, I, 1943, str, 164.

[19] Ne bi vrijedio prigovor, da jedan od spinora (14a) ili (14b) nije možda rješenje istog oblika jednadžbi (6), ako je to drugi spinor, jer bismo se o tom lako osvjedočili, kad bismo izveli račun analogan onome, kakav je izveden u knjizi L. de Broglie-a (L'Électron magnétique, 1934) na str. 162 ili u knjizi C. Schaefera (Theor. Phys., III-2, 1937) na str. 460.

4. Problem protona

Čini se, da se na analogan način, kakav je upotrebljen kod neutrona, može izvesti pokušaj objašnjenja magnetskog momenta protona. U tu svrhu ponajprije pomislimo, da je u jednadžbama (13a) i (13b) svuda pisano $3e$ mjesto $2e$, kao da protonu pripisujemo (po apsolutnom iznosu) trostruk elementaran naboj $3e$[22]. Tome se ne smijemo čuditi, kad danas ima u nauci mišljenje, da se proton uz izvjesne uvjete može raspasti na neutron i pozitivni mezon.

Ako pak sada odaberemo u skladu s relacijom (10)

$$\Psi_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{3}} A_{3\,4}\, e^{-\frac{(x+v_x t)^2+(y+v_y t)^2+(z+v_z t)^2}{2\kappa_p^2}} e^{-\frac{2\pi i}{h}(Ut+p_x x+p_y y+p_z z)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} A_{3,4}\, P' \tag{20a}$$

$$\Psi_{7,8} = \sqrt{\frac{2}{3}} A_{3,4}\, e^{-\frac{(x-v_x t)^2+(y-v_y t)^2+(z-v_z t)^2}{2\kappa_p^2}} e^{-\frac{2\pi i}{h}(Ut-p_x x-p_y y-p_z z)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} A_{3,4}\, P'' \tag{20b}$$

gdje R_p znači »praktičko« proširenje valnog paketa sadašnje nove čestice, onda nas posve analogan postupak prema postupku od (14a, b) do (16a, b) vodi do dvije grupe jednadžbi, a od njih bi prva bila identična sa (16a) do na M_n i R_n, mjesto kojih veličina bismo sada pisali M_p i R_p, dok bi druga grupa glasila:

[20] I elektron i pozitron mogli bi se također obraditi primjenom apsolutnih vrijednosti naboja u jednadžbama (5), ako bismo samo odabrali zgodan valni paket, tako da nam statistička gustoća konvektivne struje (od translacije) dobije određen predznak. Što se magnetskog momenta tiče, to nam metoda valnog paketa daje konačno i onako samo apsolutan iznos magnetskog momenta.

[21] A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien, II, 1939, str. 665.

[22] (Vidi opasku [14]).

$$j''_x = \left\{ 2\,(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_x + 2\,\frac{eh}{4\pi M_p}\left[i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3)\,\frac{\partial}{\partial y} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3)\,\frac{\partial}{\partial z}\right]\right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_p^2}}$$

$$j''_y = \left\{ 2\,(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_y + 2\,\frac{eh}{4\pi M_p}\left[(-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3)\,\frac{\partial}{\partial z} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3)\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_p^2}} \qquad (21)$$

$$j''_z = \left\{ 2\,(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_z + 2\,\frac{eh}{4\pi M_p}\left[(\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3)\,\frac{\partial}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3)\,\frac{\partial}{\partial y}\right]\right\} e^{-\frac{x^2=y^2+z^2}{R_p^2}}.$$

Prema tome totalne komponente statističke gustoće struje, koje su izračunane po apsolutnom iznosu naboja čestice na osnovi jednadžbi (13a) i (13b), a te jednadžbe pomišljamo sada, kako je malo prije rečeno, pisane sa $3e$ mjesto s $2e$, ili (16a) i (21), glase:

$$j_x = j'_x + j''_x = \left\{ (\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_x + 3\,\frac{eh}{4\pi M_p}\left[i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3)\,\frac{\partial}{\partial y} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3)\,\frac{\partial}{\partial z}\right]\right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_p^2}}$$

$$j_y = j'_y + j''_y = \left\{ (\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_y + 3\,\frac{eh}{4\pi M_p}\,(-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3)\,\frac{\partial}{\partial z} - \right. \qquad (22)$$

$$\left. - i\,(\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3)\,\frac{\partial}{\partial x}\right]\right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_p^2}}$$

$$j_z = j'_z + j''_z = \left\{ (\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\, e v_z + 3\,\frac{eh}{4\pi M_p}\left[(\overset{*}{A}_4 A_4 - \overset{*}{A}_3 A_3)\,\frac{\partial}{\partial x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (-\overset{*}{A}_3 A_4 - \overset{*}{A}_4 A_3)\,\frac{\partial}{\partial y}\right]\right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_p^2}}.$$

Daljim računom izveli bismo analogno računu, kakav je izveden za elektron i pozitron od jednadžbi (7) do jednadžbi (8), jedino s razlikom u normiranju, koje bismo dakako sada proveli prema

$$\int |\varrho|\, d\tau = 3e\,(= 3\,|\varepsilon|) \qquad (23a)$$

gdje se integracija proteže na čitav prostor[23]. Prema tome jednadžba za normiranje imala bi da glasi [s obzirom na prvu jednadžbu pod (5), koju pomišljamo sada pisanu sa $3e$ mjesto tamošnjega ε]

$$\int (\Sigma\, \overset{*}{\Psi}_\beta\, \Psi_\beta)\, d\tau = 1 \qquad (23b)$$

a to zbog (20a) i (20b) daje

$$(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R_p^2}}\, d\tau = 1, \qquad (23c)$$

i tako bismo po malo prije spomenutom postupku došli do apsolutnog iznosa magnetskog momenta ovdje opisane čestice

$$|\mathfrak{M}| = 3\,\frac{eh}{4\pi M_p\, c} \qquad (24)$$

Međutim je za proton izvedeno u eksperimentalnoj fizici

$$-(2{\cdot}785 \pm 0{\cdot}02)\,\frac{eh}{4\pi M_p\, c}\,,^{24}$$

a to je tako blizu teorijskim putem upravo izvedenoga iznosa za magnetski momenat, te se ne možemo oteti dojmu, da nam ovdje izloženi izvod daje jezgru rješenja.

Možda nije posve bez interesa, ako se spomene, da za magnetski momenat protona možemo dobiti i takvu vrijednost, koja je posve u skladu s eksperimentalno dobivenom vrijednošću. Ako naime ispred $A_{3.4}$ u (20a) stavimo faktor $\sqrt{\frac{0{\cdot}9}{2{\cdot}8}}$, a

[23] Zanimljivo je navesti (kao neki putokaz) da je »model« protona sa tri elementarna naboja dao na pr. F. Renner u časopisu »Die Naturwissenschaften«, god. 26, 1938, na str. 738.

[24] R. Fleischmann, Die Physik in regelm. Ber., 8, 1940, str. 21; J. Mattauch — S. Flügge, Kernphysikal. Tabellen, 1942, str. 18 i 100; L. de Broglie, La théorie du noyau, I, 1943, str. 158 i 164.

ispred $A_{3,4}$ u (20b) faktor $\sqrt{\frac{1{\cdot}9}{3{\cdot}8}}$ mjesto sadašnjega $\sqrt{\frac{2}{3}}$, a na desnoj strani jednadžbe (23a) stavimo $2{\cdot}8e$ mjesto $3e$ (isto tako pomislimo i u jednadžbama (13a) i (13b) pisano $2{\cdot}8e$ mjesto $2e$ za slučaj, kad se radi o protonu) kao da se zbog nekakvog međusobnog djelovanja (l'interaction) naboja protona radi po apsolutnom iznosu o »efektivnom« naboju[25] $2{\cdot}8e$ mjesto ukupnoga $3e$, onda bi nas račun doveo do vrijednosti

$$|\mathfrak{M}| = 2{\cdot}8\,\frac{eh}{4\pi M_p c}.$$

Slično bismo dobili i za magnetski moment neutrona vrijednost

$$1{\cdot}94\,\frac{eh}{4\pi M_n c},$$

kad bismo u jednadžbama (13a), (13b) i (18a) svuda pisali $1{\cdot}94e$ mjesto sadašnjega $2e$, kao da se i opet zbog nekakvoga međusobnog djelovanja dvaju elementarnih naboja neutrona radi o »efektivnom« naboju $1{\cdot}94e$.

5. Problem spina kod čestice sa dva spinora

Ovaj prikaz ne bi bio potpun, kad se ne bismo osvrnuli još i na problem spina kod čestice sa dva spinora. Kako se naime neutron i proton opisuju ovim prikazom sa dva spinora, javlja nam se spomenuto pitanje, jer je D i r a c pokazao samo za čestice sa jednim spinorom (elektron, pozitron), da im pripada spin

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2\pi}.$$

U tu svrhu pomislimo matrice (2) rastavljene svaku u dvije matrice prema shemi.

[25] Pojam »efektivnoga« naboja jezgre nije ovdje spomenut prvi put, već je poznat iz B o h r o v e teorije (isp. na pr.: A. S o m m e r f e l d, Atombau u. Spektrallinien, 1922, str. 90, 607), iako se ovdje očito ne smije shvatiti od riječi do riječi u smislu bilo kakvog modela protona.

$$a_1' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a_1+ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_1-ib_1}{\sqrt{a_1^2+{}_1b^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_1+ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_1-ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{25a}$$

$$a_2' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{a_1+ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_1-ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_1-ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_1+ib_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{b_1 - i a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b_1 + i a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_1 - i a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1 + i a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{25a}$$

$$\alpha_4' = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_1'' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2 + i b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_2 - i b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a_2 + i b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2 - i b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{25b}$$

$$\alpha_2'' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2 + i b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_2 - i b_2}{a_2^2 + b_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2 - i b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_2 + i b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_2 - i a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_2 + i a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b_2 - i a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_2 + i a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{25b}$$

$$\alpha_4'' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Da pokažemo, da je spin čestice sa dva spinora $\frac{h}{4\pi}$, pomislimo Hamiltonov operator, koji odgovara matricama (25a) i (25b)

$$H \equiv c\,\frac{h}{2\pi i}\left[\left(\alpha_1'\,\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2'\,\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3'\,\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h}\,\alpha_4'\,M_0\,c\right) + \left(\alpha_1''\,\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2''\,\frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3''\,\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2\pi i}{h}\,\alpha_4''\,M_0\,c\right)\right] + \Phi(r), \tag{26}$$

gdje je $\Phi(\gamma)$ skalarni potencijal nuklearnih sila, a pod njihovim utjecajem neka se giblje čestica (nukleon: proton, neutron); nuklearne sile možemo pomišljati ovdje »centralne«, t. j. Wignerova tipa. Za proton mogli bismo uzeti i to, da se nalazi pod utjecajem Coulombove sile (problem dvaju tijela kod spektra vodikova atoma).

Odredimo li sada izraz $M H_x - H_x M$, gdje je

$$M_x = 1\,\frac{h}{2\pi i}\left(y\,\frac{\partial}{\partial z} - z\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

operator impulsmomenta oko X-osi, pa ako na taj operator primijenimo sada oba spinora prema pravilu

$$\alpha_\beta\,\Psi_\gamma = \sum_{\sigma=1}^{4} (\alpha_\beta')_{\gamma\sigma}\,\Psi_\sigma' + \sum_{\sigma=5}^{8} (\alpha_\beta'')_{\gamma\sigma}\,\Psi_\sigma'' \qquad (\gamma = 1,2,3,4,5,6,7,8;\ \beta = 1,2,3.4) \tag{27}$$

izašlo bi nam nakon računa, koji je posve analogan onomu, kakav je izveden kod elektrona i pozitrona[26],

$$(H\,M_x - M_x\,H)\,\Psi = -\frac{ch^2}{4\pi^2}\left\{\left(\alpha_2'\,\frac{\partial\Psi'}{\partial z} - \alpha_3'\,\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right) + \left(\alpha_2''\,\frac{\partial\Psi''}{\partial z} - \alpha_3''\,\frac{\partial\Psi''}{\partial y}\right)\right\} \tag{28}$$

Konstruirajmo sad operator

$$S_x \equiv \frac{h}{4\pi i}\,(\alpha_2' + \alpha_2'')\,(\alpha_3' + \alpha_3'') \equiv \frac{h}{4\pi i}\,(\alpha_2'\,\alpha_3' + \alpha_2''\,\alpha_3'') \tag{29}$$

[26] C. Schaefer, Theor. Phys., III-2, 1937, str. 478—479.

i odredimo $H S_x - S_x H$, tu bi nam došli produkti od po tri matrice α' ili α'', a lako bismo zaključili, da je

$$\alpha'_2\alpha'_2\alpha'_3 = \alpha'_3 \quad \alpha'_3\alpha'_2\alpha'_3 = -\alpha'_2 \quad \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3 = \alpha'_2\alpha'_3\alpha'_1 \quad \alpha'_4\alpha'_2\alpha'_3 = \alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4$$
$$\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_2 = -\alpha'_3 \quad \alpha'_2\alpha'_3\alpha'_3 = \alpha'_2 \qquad (30a)$$

$$\alpha''_2\alpha''_2\alpha''_3 = \alpha''_3 \quad \alpha''_3\alpha''_2\alpha''_3 = -\alpha''_2 \quad \alpha''_1\alpha''_2\alpha''_3 = \alpha''_1\alpha''_2\alpha''_3 \quad \alpha''_4\alpha''_2\alpha''_3 = \alpha''_2\alpha''_3\alpha''_4$$
$$\alpha''_2\alpha''_3\alpha''_2 = -\alpha''_3 \quad \alpha''_2\alpha''_3\alpha''_3 = \alpha''_2 \qquad (30b)$$

Primjena toga dala bi nam konačno spomenuti operator, koji bismo opet primijenili na oba spinora prema pravilu (27); tako bismo dobili za $(H S_x - S_x H)\,\Psi$ izraz, protivno jednak izrazu pod (28), i tako bismo konačno imali

$$[H(M_x + S_x) - (M_x + S_x) H]\,\Psi = 0$$

što znači, da je $(M_x + S_x)\,\Psi$ konstanta. Kod toga bismo operator M_x impulsmomenta primijenili na oba spinora prema pravilu

$$M_x\,\Psi = \frac{h}{2\pi i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)(\alpha'_5\,\Psi' + \alpha''_5\,\Psi'')$$

gdje nam α'_5 i α''_5 znače ove dijelove osmoredne jedinične matrice

$$\alpha'_5 = \begin{Vmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha''_5 = \begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{Vmatrix}$$

a razabiramo, da je $\alpha'_5 + \alpha''_5 = 1$. Analogno bismo pokazali i za $(M_y + S_y)\,\Psi$ i za $(M_z + S_z)\,\Psi$ da su konstantne.

Dakle čestici, kojoj pripisujemo dva spinora, pripada spin $\frac{h}{4\pi}$, a to je, kako se drži, spin sviju elementarnih čestica [elektrona, pozitrona, neutrona i protona][27].

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 11. III. 1948.)

[27] H. Kallmann, Einf. in die Kernphysik, 1938, str. 48—49; J. Mattauch — S. Flügge, Kernphysikal. Tabellen, 1942, str. 18; L. de Broglie, La théorie du noyau, I, 1943, str. 80.

Dr. RUDOLF CESAREC

O CIRKULARNIM RACIONALNIM KRIVULJAMA 4. REDA, IZVEDENIM IZ IZVJESNIH KONOIDA

Uspravni eliptični konoid 4. reda s kružnom osnovkom, presječen nekom općenitom ravninom, daje kao presjek neku ravnu krivulju 4. reda k^* s tri dvostruke točke (dakle racionalnu krivulju 4. reda), koja se na direkcionu ravninu konoida normalno projicira u cirkularnu racionalnu krivulju 4. reda k. Jedna od tri dvostruke točke svake od tih dviju krivulja leži neizmjerno daleko, dok su ostale dvije u konačnosti. Jednom od ovih ide »konačna« dvostruka pravčasta ravnalica konoida, dok druga potječe od njegove dvostruke izvodnice. Ali ako se uzme sasvim planimetrijski, a priori je jasno, da te dvije »konačne« dvostruke točke krivulje k moraju biti među sobom ravnopravne, pa odatle zaključujemo, da mora postojati još i *drugi* uspravni eliptični konoid 4. reda, kojemu konačna dvostruka pravčasta ravnalica ide onom drugom konačnom dvostrukom točkom krivulje k, a prva onda potječe od dvostruke izvodnice toga drugoga konoida. To znači, da je krivulja k normalna projekcija presječne krivulje toga drugoga konoida s izvjesnom ravninom, i to projekcija na njegovu direkcionu ravninu.

Zadatak je ove radnje, da taj apriorni zaključak, koji bi se mogao označiti i kao puko naslućivanje, strogo dokaže. A izvest ćemo to analitičkom metodom, jer se jedino tako može egzaktno riješiti naš zadatak. Pri tome će se na posve jednostavan način otkriti s obzirom na spomenute konoide i krivulje još neke druge geometrijske pojave i odnosi, koji bi u sintetičkoj metodi ostali sakriveni.

1. Ravnalice zadanoga uspravnog eliptičnog konoida, koji ćemo označiti sa **K**, neka su zadane ovako: konačna dvostruka pravčasta ravnalica neka je pravac m (sl. 1.), okomit na koordinatnu ravninu xy u točki $M(x_0, y_0, 0)$, a neizmjerno daleka dvostruka pravčasta ravnalica neka je neizmjerno daleki pravac n_∞ ravnine xy, dok treća, jednostruka i nužno krivocrtna ravnalica neka bude elipsa e kao presjek cilindrične plohe Λ:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \tag{1}$$

i ravnine **E**:

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{2}$$

Koordinatna je ravnina xy dakle direkciona ravnina konoida, a jednadžba (1) predočuje ujedno i kružnicu l u toj ravnini, koja znači normalni presjek i ravnalicu rotacione cilindrične plohe Λ. Radi što jednostavnijih računa i grafičkih predočenja uzet ćemo, da elipsa e dira ravninu xy (što nikako ne će umanjiti općenitost naših izvođenja); analitički će se to pokazati na taj način, što će konstante iz jednačaba (1) i (2) biti među sobom povezane izvjesnom relacijom. Ako je E_1 diralište elipse e i ravnine xy, a e_1 trag ravnine **E** u ravnini xy, tada je jasno, da će elipsa e dirati i taj trag e_1 u točki E_1. U točki E_2^* elipse e, diametralnoj za točku E_1, bit će tangenta e_2^* elipse paralelna sa e_1, a normalna projekcija e_2 ove tangente na ravninu xy bit će tangenta kružnice l u točki E_2, koja znači projekciju točke E_2^*, te će biti $e_2 \parallel e_1$. Tangentu e_2^* možemo shvatiti i kao presječnicu ravnine **E** s ravninom Δ, koja je paralelna s ravninom xy i dira elipsu e u točki E_2^*. Označimo li udaljenost tih dviju paralelnih ravnina sa v, bit će ta veličina v s konstantama iz (1) i (2) vezana novom relacijom; v možemo shvatiti i kao visinu rotacionog valjka, kojemu je osnovka kružnica (1), a na plaštu kojega se nalazi elipsa e tako, da dira obadvije osnovke valjka: donju, l, u točki E_1, a gornju u točki E_2^*.

Odredit ćemo najprije gore spomenute relacije, kojima su među sobom vezane konstante p, q, r, a, b, c, d i v, a onda jednadžbu konoida **K**. Trag e_1 ravnine **E** ima jednadžbe

$$z = 0, \qquad ax + by + d = 0, \tag{3}$$

a uvjet za diranje kružnice (1) i pravca, predočenoga drugom jednadžbom (3), glasi

$$(ap + bq + d)^2 = (a^2 + b^2)\, r^2, \tag{4}$$

dok za diralište E_1 imamo koordinate:

$$E_1 \left(\frac{b^2p - abq - ad}{a^2 + b^2}, \quad \frac{-abp + a^2q - bd}{a^2 + b^2}, \quad 0 \right). \tag{5}$$

Pravac e_2^* ima jednadžbe

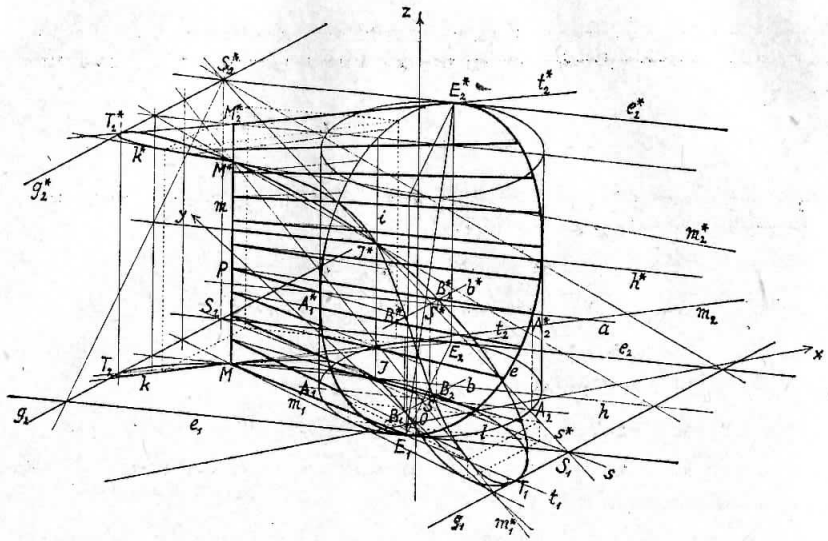
$$z = v, \qquad ax + by + (cv + d) = 0, \tag{6}$$

dakle je uvjet za diranje kružnice (1) i pravca e_2, predočenog drugom jednadžbom (6):

$$[ap + bq + (cv + d)]^2 = (a^2 + b^2)\, r^2 \tag{7}$$

s diralištem

$$E_2 \left(\frac{b^2p - abq - a(cv + d)}{a^2 + b^2}, \quad \frac{-abp + a^2q - b(cv + d)}{a^2 + b^2}, \quad 0 \right), \tag{8}$$



Sl. 1.

dok točka E_2^* ima istu apscisu i ordinatu kao točka E_2, samo joj je aplikata $= v$, a ne nula.

Iz jednačaba (4) i (7) izvodimo suptrakcijom jednadžbu

$$2(ap + bq + d) + cv = 0 \tag{9}$$

kao prvu od traženih relacija, dok se druga dobiva spomoću ove iz jednadžbe (4) u obliku

$$4(a^2 + b^2)\, r^2 = c^2v^2. \tag{10}$$

Da nađemo jednadžbu konoida **K**, položit ćemo točkom $P(x_0, y_0, z)$ dvostruke ravnalice m ravninu, paralelnu s koordinatnom ravninom xy i odrediti njezina sjecišta A_1^*, A_2^* (sl. 1.) s elipsom e; pravci PA_1^*, PA_2^* su izvodnice konoida. Aplikata točaka A_1^*, A_2^* jednaka je aplikati točke P, t. j. z, a apscise i ordinate dobiju se iz jednačaba (1) i (2), te imamo, uvaživši relacije (4) i (9), za njih izraze

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \left[b^2p - a(bq + cz + d) \pm bc \sqrt{z(v - z)} \right],$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \left[a^2q - b(ap + cz + d) \mp ac \sqrt{z(v - z)} \right].$$

Sastavimo li spomoću toga jednadžbe izvodnica PA_1^*, PA_2^*, uklonimo iracionalitete, sredimo po potencijama od z i uvažimo relaciju

$$\frac{1}{2}(ap+bq+d) = -\frac{(a^2+b^2)r^2}{cv},$$

koja izlazi iz (4) i (9) dijeljenjem, i relaciju (10), dobivamo jednadžbu konoida **K** u obliku:

$$4c^2r^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]z^2 -$$
$$-4cr^2[b_1(x-x_0)^2-2c_1(x-x_0)(y-y_0)+a_1(y-y_0)^2]+$$
$$+[b_2(x-x_0)-a_2(y-y_0)]^2=0, \qquad (11)$$

gdje su uvedene pokrate

$$a_1=2a(p-x_0)+cv, \qquad a_2=cv(p-x_0)+2ar^2,$$
$$b_1=2b(q-y_0)+cv, \qquad b_2=cv(q-y_0)+2br^2. \qquad (12)$$
$$c_1=b(p-x_0)+a(q-y_0);$$

Veličine na lijevim stranama ovih jednačaba su poznate, jer su one na desnim stranama zadane, dakako uz stege (9) i (10).

Konoid (11) je 4. reda, kako se vidi iz njegove jednadžbe, a što je u skladu i sa sintetičkom teorijom algebarskih tračnih ploha. On ima jednu dvostruku izvodnicu h^*, koja je paralelna s tragom e_1, a dobiva se kao presječnica ravnine **E** i ravnine Φ, položene dvostrukom ravnalicom m paralelno s tragom e_1; dakle je i sama ta izvodnica h^* paralelna sa e_1. Njezine jednadžbe jesu: jednadžba (2) kao jednadžba ravnine **E** i jednadžba

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \qquad (13)$$

kao jednadžba ravnine Φ; iz tih se dviju jednačaba dobiva visina dvostruke izvodnice h^* nad ravninom xy:

$$z=-\frac{1}{c}(ax_0+by_0+d). \qquad (14)$$

Torzalni pravci konoida, koji pripadaju ravnalici n_∞, su pravci $ME_1 \equiv t_1$ i $M_2^*E_2^* \equiv t_2^*$, gdje su M, M_2^* probodišta dvostruke ravnalice m s torzalnim ravninama xy i Δ, dakle s ravninama $z=0$ i $z=v$. Prema tome jednadžbe tih torzalnih pravaca glase spomoću (5) i (8):

$$y-y_0=\frac{a^2(q-y_0)-b(ap+by_0+d)}{b^2(p-x_0)-a(ax_0+bq+d)}(x-x_0), \quad z=0;$$
$$y-y_0=\frac{a^2(q-y_0)-b[ap+by_0+(cv+d)]}{b^2(p-x_0)-a[ax_0+bq+(cv+d)]}(x-x_0), \quad z=v. \qquad (15)$$

2. Konoid (11) presjeći ćemo sada općenitom ravninom Γ

$$Ax+By+Cz+D=0; \qquad (16)$$

njezini su tragovi g_1, g_2^* u ravninama xy i Δ dani jednadžbama:

$$z=0, \quad Ax+By+D=0;$$
$$z=v, \quad Ax+By+(Cv+D)=0, \qquad (17)$$

dok je normalna projekcija g_2 tragá g_2^* na ravninu xy dana drugom jednadžbom (17) u svezi s jednadžbom $z=0$.

Presječna krivulja k^* je 4. reda, jer je toga reda i sam konoid; pojedine njezine točke dobiju se kao probodišta ravnine Γ s izvodnicama konoida (vidi točke B_1^*, B_2^* na sl. 1.). Krivulja k^* ima tri dvostruke točke, i to u probodištima M^*, N_∞^*, J^* ravnine Γ s ravnalicama m i n_∞ konoida odnosno s njegovom dvostrukom izvodnicom h^*, predočenom jednadžbama (13) i (14). Koordinate tih dvostrukih točaka lako se dobiju i glase:

$$M^*(x_0, y_0, z_0), \quad N_\infty^*(-B:A:0:0), \quad J^*(x_i, y_i, z_i), \qquad (18)$$

gdje je

$$x_i=\frac{(cB-bC)(ax_0+by_0)+b(cD-dC)}{c(aB-bA)},$$
$$y_i=-\frac{(cA-aC)(ax_0+by_0)+a(cD-dC)}{c(aB-bA)}, \qquad (19)$$
$$z_i=-\frac{1}{c}(ax_0+by_0+d), \quad z_0=-\frac{1}{C}(Ax_0+By_0+D).$$

Aplikata z_0 točke M^* dobije se iz (16) za $x=x_0$, $y=y_0$; aplikata z_i točke J^* dana je jednadžbom (14), a apscisa i ordinata x_i, y_i dobiju se spomoću činjenice, da ta točka leži na presječnici s^* ravnina **E** i Γ, dakle su određene jednadžbama (2) i (16). Što se tiče koordinata točke N_∞^*, vrijedi ovo: neizmjerno daleka dvostruka pravčasta ravnalica n_∞ konoida **K** leži u direkcionoj ravnini xy, dakle ima aplikatu $z=0$; a budući da je N_∞^* sjecište pravca g_1 iz (17) i pravca n_∞, koji je dan jednadžbama

$$z=0, \; t=0,$$

gdje je t četvrta, homogenizirajuća koordinata našega operacionog prostora, izlazi iz druge jednadžbe pravca g_1:

$$Ax+By=0, \qquad \text{t. j.} \qquad x:y=-B:A.$$

Krivulja $k^* \equiv \mathbf{K} \times \Gamma$ dana je jednadžbama (11) i (16), pa će se jednadžba njezine normalne projekcije k na ravninu xy dobiti tako, da iz te dvije jednadžbe eliminiramo koordinatu z; tako dobivamo za k jednadžbu

$$\begin{aligned} &4c^2r^2\,(Ax+By+D)^2\,[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]+\\ &+4c^2rC\,(Ax+By+D)\,[b_1(x-x_0)^2-\\ &-2c_1\,(x-x_0)\,(y-y_0)+a_1\,(y-y_0)^2]+\\ &+C^2\,[b_2(x-x_0)-a_2\,(y-y_0)]^2=0. \end{aligned} \tag{20}$$

No poslužívši se pokratama

$$\frac{C}{c}a_1=2A_1,\qquad \frac{C}{c}b_1=2B_1,\qquad \frac{C}{c}c_1=C_1;$$

$$\frac{C}{2cr}a_2=A_2,\qquad \frac{C}{2cr}b_2=B_2;\qquad Ax_0+By_0+D=D_1$$

i identitetom

$$Ax+By+D\equiv A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)+D_1$$

i sredivši tako preinačenu jednadžbu (20), izlazi za krivulju k jednadžba u obliku:

$$\begin{aligned} &[A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)]^2\,[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]+\\ &+2\,[A\,(x-x_0)+B\,(y-y_0)]\,[(B_1+D_1)\,(x-x_0)^2-\\ &-C_1\,(x-x_0)\,(y-y_0)+(A_1+D_1)\,(y-y_0)^2]+\\ &+[(B_2^2+2\,B_1D_1+D_1^2)\,(x-x_0)^2-\\ &-2\,(A_2B_2+C_1D_1)\,(x-x_0)\,(y-y_0)+\\ &+(A_2^2+2\,A_1D_1+D_1^2)\,(y-y_0)^2]=0. \end{aligned} \tag{21}$$

Iz same strukture ove jednadžbe čitamo: 1) krivulja k je cirkularna, jer grupa članova najviše dimenzije sadržava agregat $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ kao faktor; 2) krivulja k ima neizmjerno daleku dvostruku točku $(-B:A:0)$, jer ona ista grupa članova sadržava faktor $[A(x-x_0)+B\,(y-y_0)]^2$ i 3) ona ima dvostruku točku (x_0, y_0), jer je grupa članova najniže dimenzije homogena kvadratna u veličinama $x-x_0$, $y-y_0$. To posljednje dvoje razabira se uostalom i iz (19). Kako se naime dvostruke točke neke krivulje normalno projiciraju opet u dvostruke točke krivulje-projekcije, to će normalne projekcije M, N_∞, J točaka M^*, N_∞^*, J^* na ravninu xy biti dvostruke točke krivulje k (povrh

toga je još i $N_\infty \equiv N_\infty^*$); treba dakle u (19) samo zabaciti aplikate, da se dobiju apscise i ordinate točaka M, N_∞, J. Analitička je verifikacija toga za točke M i N_∞ očevidna, dok se za točku J mora provesti, i to tako, da se pokaže, da koordinate te točke zadovoljavaju jednadžbu (21), kao i jednadžbe, koje se iz nje dobiju jednokratnim parcijalnim deriviranjem po x odnosno y. Neizmjerno daleka dvostruka točka N_∞^* može se uostalom shvatiti i kao zajedničko probodište ravnine Γ i onih dviju izvodnica konoida $\mathbf{K}$, koje su paralelne s tom ravninom.

Obadvije su krivulje k i k^* racionalne krivulje 4. reda (jer imaju maksimalni broj dvostrukih točaka, što ih krivulja 4. reda može imati), samo što je krivulja k još i cirkularna, dok krivulja k^* nije.

Što se tiče smještaja krivulje k u ravnini xy, možemo reći, da se ona sva nalazi u pruzi (g_1, g_2), omeđenoj paralelama g_1, g_2 (sl. 1.), što odgovara činjenici, da se krivulja k^* nalazi sva u pruzi (g_1, g_2^*), omeđenoj paralelama g_1, g_2^* u ravnini Γ, a to opet izlazi odatle, što se konoid $\mathbf{K}$ nalazi sav između paralelnih ravnina xy i Δ, dakle u sloju, što ga u prostoru određuju te dvije ravnine. To sve vrijedi dakako samo za realne dijelove krivulja k, k^* i konoida $\mathbf{K}$, dok se u svom imaginarnom dijelu te tvorevine prostiru i izvan spomenutih pruga odnosno sloja. Krivulja k^* dira pravce g_1, g_2^*, koji omeđuju prugu (g_1, g_2^*), u točkama T_1, T_2^*, u kojima torzalni pravci t_1, t_2^* konoida sijeku svoj pripadni trag g_1 odnosno g_2^* (sl. 1.)[1]; krivulja k, kao xy-projekcija od k^*, dira dakako pravce g_1, g_2 u pripadnim točkama T_1, T_2.

[1] Ova slika prikazuje u ortogonalno-aksonometrijskoj projekciji (prikrate na osima x, y, z su 46 : 29 : 45; u sl. 3. je orijentiranim pravcem n dana normalna xy-projekcija vidne zrake, t. j. smjera, u kome gledajući dobivamo sl. 1. odnosno 4. i 5.) konoid $\mathbf{K}$, zadan ellpsom

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25,\quad 18x+24y-25z+42=0,$$

pravcem m $(x_0=-5, y_0=9)$ i pravcem n_∞ u ravnini xy kao ravnalicama; visina je konoida prema (9) $v=12$. Krivulja k^* je presjek toga konoida i ravnine $6x-12y+23z-96=0$. Jednadžba konoida glasi:

$$\begin{aligned} &25\,[(x+5)^2+(y-9)^2]\,z^2-12\,[49\,(x+5)^2+10\,(x+5)\,(y-9)+\\ &+4\,(y-9)^2]\,z+144\,[5\,(x+5)+2\,(y-9)]^2=0, \end{aligned}$$

a jednadžba krivulje k:

$$\begin{aligned} &25\,[(x+5)-2\,(y-9)]^2\,[(x+5)^2+(y-9)^2]+\\ &+2\,[(x+5)-2\,(y-9)]\,[152\,(x+5)^2+\\ &+230\,(x+5)\,(y-9)-883\,(y-9)^2]+\\ &+[3019\,(x+5)^2+24380\,(x+5)\,(y-9)+39313\,(y-9)^2]=0. \end{aligned}$$

Dvostruke točke krivulje k^* jesu:

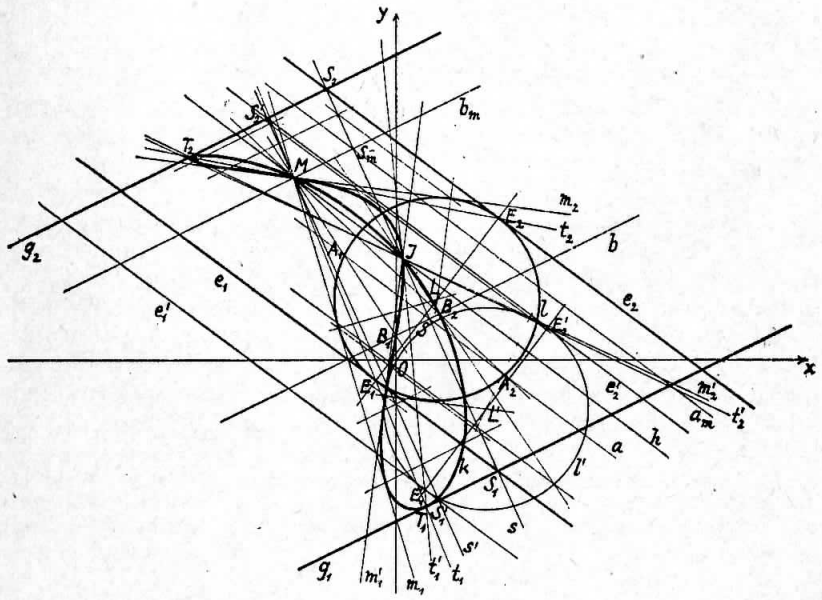
$$M^*\left(-5,9,\frac{234}{23}\right),\ \Lambda_\infty^*\,(2:1:0),\ J^*\left(\frac{37}{125},\frac{1257}{250},\frac{168}{25}\right).$$

3. Iz prostornoga izvođenja ravne krivulje 4. reda k, koja je utvrđena kao cirkularna racionalna, možemo lako izljuštiti njezinu planimetrijsku konstrukciju. Zadana je kružnica l jednadžbom (1) i njezine dvije paralelne tangente e_1, e_2 (sl. 2.)[2] jednadžbama

$$y = \gamma x + \delta_1 , \qquad y = \gamma x + \delta_2 , \tag{22}$$

zatim čvrsta točka $M\,(x_0, y_0)$ i dva paralelna pravca g_1, g_2 s jednadžbama

$$y = \alpha x + \beta_1 , \qquad y = \alpha x + \beta_2 . \tag{23}$$



Sl. 2.

Veličine α, β_1, β_2 — planimetrijski uzeto — posve su slobodne (to su uostalom bili i koeficijenti A, B, C, D u jednadžbi (16) ravnine Γ), dok su veličine γ, δ_1, δ_2 vezane među sobom i s konstantama kružnice (1) relacijom

$$\delta_{1,2} = q - \gamma p \mp r\sqrt{1+\gamma^2} . \tag{24}$$

[2] Krivulja k u ovoj slici je ona ista, koja je u sl. 1. predočena aksonometrijski.

Sjecišta S_1, S_2 pravaca e_1 i g_1 odnosno e_2 i g_2, određuju pravac s, koji u našoj prostornoj konfiguraciji (sl. 1.) znači normalnu xy-projekciju presječnice s^* ravnina $\mathbf{E}$ i Γ. Bilo koja paralela a s e_1 u pruzi (e_1, e_2) siječe kružnicu l u točkama A_1, A_2, pravac s u točki S, a pravci MA_1, MA_2 sijeku pravac b, povučen točkom S paralelno sa g_1, u točkama B_1, B_2[3], koje pripadaju našoj krivulji k. Ta krivulja izlazi dakle kao geometrijsko mjesto točaka B_1, B_2, te je tako proizvod dvaju pramenova pravaca, koji se nalaze u (1, 2)-značnoj projektivnoj korespondenciji; dvostruki pramen ima vrh u točki M, a jednostruki je paralelan (sastoji se od pravaca b) s vrhom u neizmjerno dalekoj točki pravca g_1, dakle u točki N_∞.

Provedemo li sve ove geometrijske operacije analitički, dobit ćemo za krivulju k poslije prilično opsežnih računa jednadžbu

$$\begin{aligned}(\gamma-\sigma)^2\ [(y-y_0)-\alpha\ (x-x_0)]^2\ [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]-\\ -2\,(\gamma-\sigma)\ [(y-y_0)-\alpha\,(x-x_0)]\ [P(x-x_0)^2+\\ +Q\,(x-x_0)\ (y-y_0)+R\,(y-y_0)^2]+\\ +[G\,(x-x_0)^2+2H\,(x-x_0)\ (y-y_0)+K\ (y-y_0)^2]=0\,,\end{aligned} \tag{25}$$

gdje je

$$\begin{aligned}P &= \alpha\,(\gamma-\sigma)\,x_0-(\gamma-\alpha)\ (y_0-\tau)+\gamma\ (\sigma-\alpha)\,p\,,\\ Q &= -(\sigma-\alpha)\cdot[(p-x_0)-\gamma\,(q-y_0)]\,,\\ R &= (\gamma-\alpha)\ (\sigma x_0+\tau)-(\gamma-\sigma)\,y_0-(\sigma-\alpha)\,q\,;\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}G &= P^2+\gamma^2\,(\sigma-\alpha)^2\,[(q-y_0)^2-r^2]\,,\\ H &= -(\sigma-\alpha)\,[(p-x_0)\,P-\gamma\ (q-y_0)\ R-\gamma\ (\sigma-\alpha)\,r^2],\\ K &= R^2+(\sigma-\alpha)^2\,[(p-x_0)^2-r^2]\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Na desnim stranama ovih jednačaba poznato je (upravo zadano) sve osim veličina σ i τ, kojih se geometrijsko značenje razabira iz jednadžbe pravca s:

$$y = \sigma x + \tau . \tag{28}$$

A budući da je pravac s određen sa dva para paralela (22) i (23), to će σ, τ biti funkcije konstanata iz tih jednačaba, i to:

$$\sigma = \frac{\alpha\,(\delta_2-\delta_1)-\gamma\,(\beta_2-\beta_1)}{(\delta_2-\delta_1)-(\beta_2-\beta_1)}\,,\qquad \tau = \frac{\beta_1\,\delta_2-\beta_2\,\delta_1}{(\delta_2-\delta_1)-(\beta_2-\beta_1)}\,. \tag{29}$$

[3] Točke A_1, A_2, B_1, B_2 su u sl. 1. normalne xy-projekcije točaka A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^*.

Tako određena krivulja k ima dvostruke točke M, N_∞, J s koordinatama

$$M(x_0, y_0), \quad N_\infty(1:\alpha:0), \quad J(x_i, y_i), \tag{30}$$

gdje je

$$x_i = \frac{\tau - (y_0 - \gamma x_0)}{\gamma - \sigma}, \quad y_i = \frac{\gamma\tau - \sigma(y_0 - \gamma x_0)}{\gamma - \sigma}. \tag{31}$$

Za prve se dvije točke to vidi iz jednadžbe (25), a za točku J se to pokazuje slično kao u čl. 2. za točku J^* spomoću činjenice, da je $J \equiv h \times s$, gdje je h paralela sa e_1, povučena točkom M. Povučemo li naime pomoćni pravac a upravo točkom M tako, da je $a \equiv h$, past će u nj i pravci MA_1, MA_2, i zbog toga će točke B_1, B_2 krivulje k pasti zajedno, i to upravo u točku $h \times s \equiv J$, te je prema tome točka J doista dvostruka točka krivulje k. To čisto planimetrijsko zaključivanje dade se provesti i za ostale dvije dvostruke točke M i N_∞. Za točku M imamo: pomoćni pravac $b_m \parallel g_1$, povučen upravo točkom M, siječe pravac s u točki S_m, a pripadni pravac $a_m \parallel e_1$ kroz S_m daje na kružnici l dvije točke A_1^m, A_2^m, koje spojene s vrhom M spomenutoga dvostrukoga, za krivulju k izvodnoga pramena pravaca daju dva pravca, a njihova sjecišta B_1^m, B_2^m sa b_m padaju opet zajedno, i to upravo u točku M tako, da je točka M doista dvostruka točka krivulje k. Za neizmjerno daleku točku N_∞ pravca g_1 vrijedi napokon ovo: isti onaj pravac b_m siječe kružnicu l u točkama A_1', A_2'' (sl. 9. a; u sl. 2. su te dvije točke imaginarne), a paralele a', a'' sa e_1, povučene tim dvjema točkama, sijeku kružnicu l po drugi put u točkama A_2', A_1'' i pravac s u točkama S', S'', kojima idu pomoćni pravci b', $b'' \parallel g_1$; tako su za krivulju k dobivene točke $B_1' \equiv MA_1' \times b'$, $B_2' \equiv MA_2' \times b'$ odnosno $B_1'' \equiv MA_1'' \times b''$, $B_2'' \equiv MA_2'' \times b''$, pa je iz same konstrukcije jasno, da će točke B_2' i B_1'' biti u konačnosti, dok će točke B_1', B_2'' biti neizmjerno daleko (kao sjecišta dviju paralela), i to upravo u smjeru pravca g_1. No taj je smjer predočen baš neizmjerno dalekom točkom N_∞, koja tako izlazi kao dvostruka točka $B_1' \equiv B_2''$ krivulje k. A jasno je iz svega, da smo u pravcima b', b'' dobili asimptote krivulje k, kao i to, da se njihov realitet ravna po realitetu točaka A_1', A_2''. No o tome će biti govora još u čl. 11. Krivulja k ide točkama, u kojima pravac s siječe kružnicu l; u tom naime slučaju padaju pripadne točke A_1 i B_1 zajedno, i to u sjecište $l \times s$ (sl. 2.).

Ako su tangente m_1, m_2 iz dvostruke točke M na kružnicu l realne (ravnine mm_1, mm_2 su dakle dvije torzalne ravnine, koje pripadaju dvostrukoj ravnalici m), raspada se po njima pramen

pravaca u vrhu M u dva dijela: jedan od njih sastoji se od pravaca, koji na sebi nose osim dvostruke točke M još i po dvije realne točke krivulje k (u tom se dijelu ravnine nalazi i sama kružnica l, vidi sl. 2.); drugi dio pramena čine pravci, za koje su te dvije točke imaginarne, a prijelaz iz jednoga dijela u drugi predočavaju upravo one dvije tangente m_1, m_2, pa je odmah jasno, da će to biti tangente i za krivulju k. A nije teško odrediti i pripadna dirališta; treba samo diralište pravca m_1 i kružnice l shvatiti kao točku A_1, pa spomoću pomoćnih pravaca a i b odrediti pripadnu točku B_1 na krivulji k (sl. 2. i 8. c). A iz svega toga izlazi, da krivulja k leži sva u ona dva vršna kuta (m_1, m_2), od kojih u jednome leži i kružnica l; u drugim dvama vršnim kutovima leži imaginarni dio krivulje.

Kada je dvostruka točka M u unutrašnjosti kružnice l, tada svaki pravac pramena $[M]$ siječe krivulju k realno, u dvije točke, jer su dvije već u točki M (sl. 9. a). Isto to vrijedi i onda, kad točka M leži na samoj kružnici l, samo što tada krivulja degenerira u krivulju 3. reda i pravac (sl. 10.); tangente m_1, m_2 padaju tada zajedno u tangentu kružnice l u točki M.

Sve to, što je rečeno o dvostrukim točkama, asimptotama, o točkama $l \times s$ i o tangentama m_1, m_2 za krivulju k, može se uz odgovarajuće preinake prenijeti na prostor, t. j. na krivulju $k^* \equiv \mathbf{K} \times \Gamma$. Tako su na pr. tangente m_1^*, m_2^* iz dvostruke točke M^* na krivulju k^* određene kao presječnice ravnine Γ krivulje k^* i tangencijalnih ravnina valjka (l, v), kojima su tragovi u ravnini xy upravo tangente m_1, m_2 (gl. sl. 1., gdje su određena i pripadna dirališta na k^* odnosno k).

Da su izrazi za x_i, y_i u (19) i (31) ekvivalentni, pokazuje se vrlo lako spomoću relacija

$$\alpha = -\frac{A}{B}, \quad \gamma = -\frac{a}{b}, \quad \sigma = -\frac{cA - aC}{cB - bC},$$
$$\tau = -\frac{cD - dC}{cB - bC}, \quad \gamma - \sigma = -\frac{c(aB - bA)}{b(cB - bC)}, \tag{32}$$

od kojih se prve dvije dobivaju izjednačivanjem jednačaba (23) i (16), odnosno (22) i (2), dalje dvije izjednačivanjem jednadžbe (36) pravca $s \equiv \mathbf{E} \times \Gamma$ s jednadžbom istoga pravca u obliku

$$(cA - aC)x + (cB - bC)y + (cD - dC) = 0, \tag{33}$$

koja je dobivena iz jednačaba (2) i (16) eliminacijom prostorne koordinate z; a posljednja relacija (32) izvedena je dakako iz druge i treće.

Za dalje naše izvode treba istaknuti važnu činjenicu, da konačne dvostruke točke M, J leže u pravcu h, koji je paralelan sa e_1, te prema tome s obzirom na (22) i (30) vrijedi važna relacija

$$\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} = \gamma, \quad \text{t. j.} \quad y_i - y_0 = \gamma (x_i - x_0). \tag{34}$$

Osim toga valja uzeti na um i činjenicu, da dvostruka točka J leži na pravcu s, dakle mora biti:

$$y_i = \sigma x_i + \tau. \tag{35}$$

Spomoću ove dvije posljednje relacije dobivaju izrazi za P, Q, R i H u (26) i (27) oblik, koji će nam još trebati:

$$\begin{aligned} P &= (\gamma - \alpha)\ (\gamma - \sigma)\ (x_i - x_0) + \gamma\ (\sigma - \alpha)\ (p - x_0)\,, \\ Q &= -(\sigma - \alpha)\ [(p - x_0) - \gamma\ (q - y_0)]\,, \\ R &= (\gamma - \alpha)\ (\gamma - \sigma)\ (x_i - x_0) - (\sigma - \alpha)\ (q - y_0)\,; \\ H &= (\gamma - \alpha)\ (\gamma - \sigma)\ (x_i - x_0)\ Q - \gamma\ (\sigma - \alpha)^2\ [(p - x_0)^2 + (q - y_0)^2 - r^2]\,. \end{aligned} \tag{36}$$

4. Poslije tih priprava prelazimo na rješavanje našega problema: odrediti, da li postoji drugi konoid, od koga nastaje ista krivulja k u ravnini xy na analogan način, kako je nastala od konoida **K**, s tom razlikom, da je sada sve osnovano na dvostrukoj točki J mjesto na dvostrukoj točki M; pa ako postoji takav konoid, odrediti njegove elemente. Zato ćemo uzeti, da on postoji, označiti ga sa **K′**, a sve njegove odredbene i izvedene elemente istim slovima, kojima su bili označeni i pripadni elementi konoida **K**, samo što ćemo svako to slovo označiti i crticom. Tako će m', n'_∞, e' značiti ravnalice od **K′**, a l', v' kružnicu-bazu, odnosno visinu valjka, koji nosi elipsu e', dok će **E′** značiti ravninu, koja iz tog valjka izrezuje elipsu e'; dalje će p', q', r' biti koordinate središta i polumjer kružnice l', a e_1', $e_2'^*$ tragovi ravnine **E′** u ravninama $z = o$, $z = v'$, dakle e_2' normalna projekcija od $e_2'^*$ na ravninu xy; napokon će g_1', $g_2'^*$, g_2' imati analogno značenje za ravninu Γ', koja konoid **K′** siječe u krivulji k'^* s normalnom xy-projekcijom $k' \equiv k$. A taj je identitet upravo odlučan moment u našem problemu, jer će nam on omogućiti, da taj problem riješimo. Za krivulju $k' \equiv k$ zahtijevamo dakle, da bude

$$M' \equiv J, \qquad N'_\infty \equiv N_\infty, \qquad J' \equiv M, \tag{37}$$

što znači, da mora biti

$$x_0' = x_i,\ y_0' = y_i;\quad B' : A' = B : A;\quad x_i' = x_0,\ y_i' = y_0. \tag{38}$$

A jasno je, da će za konoid **K′** i krivulje k'^* i $k' \equiv k$ vrijediti sve dosada zadane ili izvedene jednadžbe, relacije, formule i izrazi, koje imamo za konoid **K** i krivulje k^*, k s tom razlikom, da se sve konstante moraju označiti i crticom.

U prvom je redu za nas važna »planimetrijska« jednadžba krivulje $k' \equiv k$ oblika (25), jer je ideja rješavanja problema drugoga konoida ova: da se ispoređivanjem tako postavljene, crticama označene jednadžbe krivulje $k' \equiv k$ i originalne jednadžbe (25) dobiju relacije između odredbenih elemenata još nepoznatog konoida **K′** i odredbenih elemenata zadanoga konoida **K**, relacije, koje će ujedno biti odredbene jednadžbe za elemente od **K′**. No prije nego što prijeđemo na to, istaknut ćemo, da zbog razmjera u (37), t. j. zbog $N'_\infty \equiv N_\infty$, mora biti s obzirom na prvu jednadžbu (32):

$$a' = a\,; \tag{39}$$

a kako iz (37) izlazi, da je pravac $M'J' \equiv JM$, t. j. $h' \equiv h$, mora s obzirom na drugu jednadžbu (32) biti:

$$a' : b' = a : b\,, \qquad \text{t. j.} \qquad \gamma' = \gamma\,. \tag{40}$$

Spomoću tih jednakosti glasit će prema (25) jednadžba krivulje k':

$$\begin{aligned} &(\gamma - \sigma')^2\ [(y - y_0') - \alpha\ (x - x_0')]^2\ [(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2] - \\ &\quad - 2\ (\gamma - \sigma')\ [(y - y_0') - \alpha\ (x - x_0')]\ [P'(x - x_0')^2 + \\ &\quad + Q'(x - x_0')\ (y - y_0') + R'\ (y - y_0')^2] + \\ &+ [G'\ (x - x_0')^2 + 2\ H'\ (x - x_0')\ (y - y_0') + K'(y - y_0')^2] = 0\,, \end{aligned} \tag{41}$$

gdje su veličine P', Q', R', G', H', K' prema (36) odnosno (27) dane formulama:

$$\begin{aligned} P' &= (\gamma - \alpha)\ (\gamma - \sigma')\ (x_i' - x_0') + \gamma\ (\sigma' - \alpha)\ (p' - x_0')\,, \\ Q' &= -(\sigma - \alpha)\ [(p' - x_0') - \gamma\ (q' - y_0')]\,, \\ R' &= (\gamma - \alpha)\ (\gamma - \sigma')\ (x_i' - x_0') - (\sigma' - \alpha)\ (q' - y_0')\,; \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} G' &= P'^2 + \gamma^2\ (\sigma' - \alpha)^2\ [(q' - y_0')^2 - r'^2]\,, \\ H' &= (\gamma - \alpha)\ (\gamma - \sigma')\ (x_i' - x_0')\ Q' - \gamma\ (\sigma' - \alpha)^2\ [(p' - x_0')^2 + \\ &\quad + (q' - y_0')^2 - r'^2]\,, \\ K' &= R'^2 + (\sigma' - \alpha)^2\ [(p' - x_0')^2 - r'^2]\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Ali treba još uvažiti i jednakosti (38), t. j. treba u (41), (42) i (43) svuda mjesto x_0', y_0' odnosno x_i', y_i' pisati poznate, zadane veličine x_i, y_i odnosno x_0, y_0; tako će lijeva strana od (41) izaći kao funkcija veličina $x-x_i$, $y-y_i$, a desne strane u (42) i (43) kao funkcije veličina x_0-x_i, y_0-y_i i $p'-x_i$, $q'-y_i$. No budući da je lijeva strana jednadžbe (25), s kojom želimo isporediti jednadžbu (41), funkcija veličina $x-x_0$, $y-y_0$, moći ćemo to ispoređivanje izvršiti tek onda, kada bude i lijeva strana od (41) funkcija tih istih veličina $x-x_0$, $y-y_0$, a ne veličina $x-x_i$, $y-y_i$. Treba dakle jednadžbu (41) transformirati na taj oblik, a to ćemo učiniti spomoću identiteta:

$$x-x_i \equiv (x-x_0)-(x_i-x_0),$$

$$y-y_i \equiv (y-y_0)-(y_i-y_0)=(y-y_0)-\gamma(x_i-x_0),$$

gdje je za drugu jednadžbu uvažena osnovna relacija (34). Unesemo li dakle te izraze u jednadžbu (41) mjesto veličina $x-x_0'$, $y-y_0'$ i tako dobivenu jednadžbu sredimo po dimenzijama u veličinama $x-x_0$, $y-y_0$, dobit ćemo jednadžbu:

$$\begin{aligned}(\gamma-\sigma')^2\,[(y-y_0)-\alpha(x-x_0)]^2\,[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]-\\ -2(\gamma-\sigma')\,[(y-y_0)-\alpha(x-x_0)]\,[(P_1(x-x_0)^2+\\ +Q_1(x-x_0)(y-y_0)+R_1(y-y_0)^2]+\\ +[G_1(x-x_0)^2+2H_1(x-x_0)(y-y_0)+K_1(y-y_0)^2]=0,\end{aligned} \tag{44}$$

gdje je

$$\begin{aligned}P_1&=P'+(\gamma-\sigma')(\gamma-2\alpha)(x_i-x_0),\\ Q_1&=Q'+(\gamma-\sigma')(1-\alpha\gamma)(x_i-x_0),\\ R_1&=R'+(\gamma-\sigma')(2\gamma-\alpha)(x_i-x_0);\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}G_1&=G'+2(\gamma-\sigma')[(\gamma-3\alpha)P'-\alpha\gamma Q'](x_i-x_0)+\\ &+(\gamma-\sigma')^2[(1+\alpha^2)\gamma^2-6\alpha(\gamma-\alpha)](x_i-x_0)^2,\\ H_1&=H'+2(\gamma-\sigma')[P'+(\gamma-\alpha)Q'-\alpha\gamma R'](x_i-x_0)-\\ &-(\gamma-\sigma')^2[3\alpha(1+\gamma^2)-2\gamma(1+\alpha^2)](x_i-x_0)^2,\\ K_1&=K'+2(\gamma-\sigma')[Q'+(3\gamma-\alpha)R'](x_i-x_0)+\\ &+(\gamma-\sigma')^2[(1+\alpha^2)+6\gamma(\gamma-\alpha)](x_i-x_0)^2.\end{aligned} \tag{46}$$

U jednadžbi (44) trebalo bi zapravo da još dođu grupe članova dimenzije 1 i 0 u veličinama $x-x_0$, $y-y_0$, no te su grupe identički jednake nuli; konstantni član u toj jednadžbi je naime rezultat supstitucije vrijednosti $x=x_i$, $y=y_i$ u jednadžbu (41), a taj mora biti jednak nuli, budući da točka (x_i, y_i) leži na krivulji (41); a koeficijenti su od $x-x_0$ i $y-y_0$ u linearnoj grupi parcijalne derivacije lijeve strane jednadžbe (41) po x odnosno y, izračunate na mjestu $x=x_i$, $y=y_i$, i prema tome su opet jednake nuli, jer je točka (x_i, y_i) dvostruka točka krivulje (41). Isporedivši sada dvije ekvivalentne jednadžbe (25) i (44) dobivamo jednakosti

$$\begin{aligned}&\frac{P}{\gamma-\sigma}=\frac{P_1}{\gamma-\sigma'},\quad \frac{Q}{\gamma-\sigma}=\frac{Q_1}{\gamma-\sigma'},\quad \frac{R}{\gamma-\sigma}=\frac{R_1}{\gamma-\sigma'};\\ &\frac{G}{(\gamma-\sigma)^2}=\frac{G_1}{(\gamma-\sigma')^2},\quad \frac{H}{(\gamma-\sigma)^2}=\frac{H_1}{(\gamma-\sigma')^2},\quad \frac{K}{(\gamma-\sigma)^2}=\frac{K_1}{(\gamma-\sigma')^2},\end{aligned} \tag{47}$$

iz kojih spomoću (36), (27), (45) i (46) izlazi:

$$P'=\frac{\gamma}{\gamma-\sigma}\frac{\sigma'}{}[\alpha(\gamma-\sigma)(x_i-x_0)+\gamma(\sigma-\alpha)(p-x_0)],$$

$$Q'=\frac{\gamma-\sigma'}{\gamma-\sigma}\{(\alpha\gamma-1)(\gamma-\sigma)(x_i-x_0)-(\sigma-\alpha)[(p-x_0)-\gamma(q-y_0)]\}, \tag{48}$$

$$R'=\frac{\gamma-\sigma'}{\gamma-\sigma}[-\gamma(\gamma-\sigma)(x_i-x_0)-(\sigma-\alpha)(q-y_0)];$$

$$\begin{aligned}G'&=\left(\frac{\gamma-\sigma'}{\gamma-\sigma}\right)^2[\alpha^2T+2\alpha\gamma U+\gamma^2V],\\ H'&=-\left(\frac{\gamma-\sigma'}{\gamma-\sigma}\right)^2[\alpha T+(\alpha+\gamma)U+\gamma V];\\ K'&=\left(\frac{\gamma-\sigma'}{\gamma-\sigma}\right)^2[T+2U+V]\end{aligned} \tag{49}$$

s pokratama

$$\begin{aligned}T&=(1+\gamma^2)(\gamma-\sigma)^2(x_i-x_0)^2,\\ U&=(\gamma-\sigma)(\sigma-\alpha)(x_i-x_0)[(p-x_0)+\gamma(q-y_0)],\\ V&=(\sigma-\alpha)^2[(p-x_0)^2+(q-y_0)^2-r^2].\end{aligned} \tag{50}$$

5. Spomoću jednačaba (48) i (49) izražene su veličine P', Q', R', G', H', K', a preko njih na osnovu relacija (45), (42) i veličine P_1, Q_1, R_1, G_1, H_1, K_1 kao funkcije jedne jedine nepoznate veličine σ', jer je sve ostalo poznato sa zadanim konoidom **K**. A veličina σ' neda se nikako eliminirati iz naših računa, što ima geometrijski razlog, koji ćemo doskora upoznati; ona dakle ostaje u izrazima (46), (47), (48) i (49) kao slobodan parametar. Ali taj parametar dolazi u formulama (48) i (49) u takvom sastavu, da nakon uvrštenja tih izraza u formule (45) i (46) dobivamo za P_1, Q_1, R_1, G_1, H_1, K_1 izraze, koji uneseni u jednadžbu (44) daju upravo jednadžbu (25) krivulje k, množenu sa $\left(\frac{\gamma-\sigma'}{\gamma-\sigma}\right)^2$. Time je onda zapravo izvršena verifikacija rezultata (48), (49).

No formule (48) i (49) nisu konačni cilj, nego imaju važnu službu: spomoću njih ćemo odrediti koordinate p', q' središta i polumjer r' kružnice l', na kojoj je zasnovan traženi drugi konoid **K'**, čime će onda biti riješen naš zadatak. Iz jednačaba (42), koje ćemo sada spomoću (38) pisati u obliku:

$$P' = -(\gamma-\alpha)(\gamma-\sigma')(x_i-x_0)+\gamma(\sigma'-\alpha)(p'-x_i),$$
$$Q' = -(\sigma'-\alpha)[(p'-x_i)-\gamma(q'-y_i)],$$
$$R' = -(\gamma-\alpha)(\gamma-\sigma')(x_i-x_0)-(\sigma'-\alpha)(q'-y_i),$$

izlazi naime, odbivši treću jednadžbu od prve:

$$\gamma(p'-x_i)+(q'-y_i)=\frac{P'-R'}{\sigma'-\alpha},$$

dok druga daje:

$$(p'-x_i)-\gamma(q'-y_i)=-\frac{Q'}{\sigma'-\alpha},$$

a te dvije jednadžbe daju rješenje:

$$p'-x_i=\frac{\gamma(P'-R')-Q'}{(1+\gamma^2)(\sigma'-\alpha)},\qquad q'-y_i=\frac{(P'-R')+\gamma Q'}{(1+\gamma^2)(\sigma'-\alpha)}.$$

No spomoću (48) izlazi odatle:

$$p'-x_i=\frac{\gamma-\sigma'}{\sigma'-\alpha}\left[(x_i-x_0)+\frac{\sigma-\alpha}{\gamma-\sigma}(p-x_0)\right],$$
$$q'-y_i=\frac{\gamma-\sigma'}{\sigma'-\alpha}\left[\alpha(x_i-x_0)+\frac{\sigma-\alpha}{\gamma-\sigma}(q-y_0)\right], \qquad (51)$$

čime su koordinate p', q' središta L' kružnice l' konačno određene, osim slobodnog parametra σ'.

Polumjer r' kružnice l' možemo izračunati iz bilo koje od tri jednadžbe (43); iz treće na pr. imamo najprije

$$r'^2=(p'-x_i)^2+\frac{R'^2-K'}{(\sigma'-\alpha)^2},$$

a ako ovamo unesemo vrijednost za $p'-x_i$ iz (51), te za R' i K' iz (48) i (49), dobivamo konačno:

$$r'^2=\left(\frac{\gamma-\sigma'}{\sigma'-\alpha}\right)^2\left(\frac{\sigma-\alpha}{\gamma-\sigma}\right)^2 r^2.^4 \qquad (52)$$

Iz jednačaba (51) i (52) zaključujemo, da ima ∞^1 kružnica l', od kojih svaka može služiti za konstrukciju konoida **K'**; toliko naime realnih vrijednosti može primiti parametar σ'[5]. Po tome je jasno, zašto se veličina σ' nije dala eliminirati iz naših rezultata, pa je to onaj geometrijski razlog, koji je bio nagoviješten na početku ovoga članka. Središta L' svih tih kružnica l' leže na pravcu, koji je parametrički predočen jednadžbama (51), ako u njima p', q' shvatimo kao koordinate bilo koje njegove točke i označimo ih sa x, y. A implicitna jednadžba toga pravca dobiva se iz (51) eliminacijom parametra σ', te glasi:

$$[\alpha(\gamma-\sigma)(x_i-x_0)+(\sigma-\alpha)(q-y_0)](x-x_i)-$$
$$-[(\gamma-\sigma)(x_i-x_0)+(\sigma-\alpha)(p-x_0)](y-y_i)=0,$$

a odatle se odmah razabira, da taj pravac ide dvostrukom točkom $J\equiv M'$ krivulje k (sl. 3.).

---

[4] Za numerički primjer u bilješci [1] imamo:

$$p'=\frac{394\sigma'+277}{25(2\sigma'-1)},\quad q'=-\frac{433\sigma'+639}{25(2\sigma'-1)},\quad r'^2=\left(\frac{23}{5}\cdot\frac{4\sigma'+3}{2\sigma'-1}\right)^2.$$

[5] U sl. 3. predočene su kružnice l' sa $r'=2,3,4,5,6$, dakle za

$$\sigma'=-\frac{79}{72},-\frac{84}{62},-\frac{89}{52},-\frac{94}{42},-\frac{99}{32}$$

odnosno za

$$\sigma'=-\frac{59}{112},-\frac{54}{122},-\frac{49}{132},-\frac{44}{142},-\frac{39}{152}.$$

U sl. 2. je kružnica l' sa $r'=r=5$ upotrebljena (prema čl. 6.) za konstrukciju krivulje $k'\equiv k$; tu je $\sigma'=\sigma=-\frac{47}{21}$ i prema tome $s'\parallel s$.

Napokon je u sl. 4. spomoću kružnice l' s $r'=7$ za $\sigma'=-\frac{104}{22}$ konstruiran konoid **K'**.

Kružnice l' čine uostalom sustav homotetičnih kružnica s točkom $M' \equiv J$ kao središtem homotetije. Za dokaz toga dovoljno je pokazati, da sve te kružnice imaju zajedničke tangente iz točke M'; jednadžbe tih tangenata m_1', m_2' (sl. 3.) lako se izračunaju i glase:

$$y - y_i = \frac{(p'-x_i)(q'-y_i) \pm r' \sqrt{(p'-x_i)^2 + (q'-y_i)^2 - r'^2}}{(p'-x_i)^2 - r'^2} (x - x_i). \quad (53)$$

A unesemo li ovamo vrijednosti za $p' - x_i$, $q' - y_i$ i r' iz (51) i (52), dobivamo jednadžbu, u kojoj više nema parametra σ', a ni crticom označenih veličina, nego dolaze samo elementi zadanoga konoida **K**. Tangente m_1', m_2' mogu biti i imaginarne, a to su onda, kada dvostruka točka $J \equiv M'$ leži u unutrašnjosti jedne, dakle i svih kružnica l'; tada je naime izraz pod korijenom u jednadžbi (53) negativan. Takav slučaj imamo na sl. 9.a za sustav kružnica l: tu su tangente m_1, m_2 iz dvostruke točke M na kružnicu l imaginarne, jer su to ujedno tangente i na čitav sustav od ∞^1, iz dvostruke točke M homotetičnih, kružnica l, kojemu ćemo postojanje utvrditi u čl. 9.

Pravci (53) su u smislu naših izvoda iz čl. 3. ujedno tangente krivulje $k' \equiv k$, koje se daju na nju povući iz dvostruke točke $J \equiv M'$. Ali po općenoj teoriji algebarskih krivulja u ravnini mora racionalna krivulja 4. reda biti 6. razreda, dakle se iz svake točke P ravnine dade na našu krivulju $k' \equiv k$ povući šest tangenata; ako je točka P na samoj krivulji, tada dvije od tih šest tangenata padaju zajedno u tangentu krivulje u točki P, dok se preostale četiri tangente od nje razlikuju; ako točka P postane dvostrukom točkom krivulje, dakle u nas točkom $J \equiv M'$, tada padaju dva puta po dvije od onih šest tangenata zajedno, i to u one dvije tangente, koje krivulja ima u toj svojoj dvostrukoj točki, dok se još preostale dvije tangente razlikuju od tih dviju. To su upravo naša dva pravca (53).

Tangente m_1', m_2' važne su dakako za konstrukciju krivulje $k' \equiv k$; no u malo prije spomenutom njihovu karakteru, kao ostatku od onih šest tangenata, leži njihova još veća važnost: spomoću njih se da naš problem drugoga konoida riješiti još na jedan način, koji se razlikuje od našega, prikazanog u čl. 4. i 5. Taj drugi način je sasvim planimetrijski, dok naš operira prostornim tvorevinama. Odredimo li naime po teoriji algebarskih krivulja skupnu jednadžbu šest tangenata iz točke $J \equiv M'$ na krivulju k, zatim prema jednadžbi (89) iz čl. 11. skupnu jednadžbu dviju tangenata te krivulje u toj samoj dvostrukoj

točki, pa kvadrat te jednadžbe odcijepimo od prve jednadžbe, dobit ćemo skupnu jednadžbu tangenata m_1', m_2'. Simetrala kuta tih dviju tangenata je geometrijsko mjesto središta L' kružnica l', a okomica iz bilo koje točke L' te uvijek realne centrale na jednu od dviju tangenata m_1', m_2', daje polumjer r' pripadne kružnice l' kao dužinu $\overline{L'D'}$, gdje je D' nožište, što ga ona okomica određuje na odnosnoj tangenti. Ako su te tangente imaginarne (dakako: konjugirano), tada je imaginarna i ona okomica, ali tako, da je nožište D' ipak realno; uvijek je dakle realan i polumjer r', a prema tome i kružnica l'. A njom je određen i sam drugi konoid **K'**, kako ćemo vidjeti u idućem članu.

6. Od drugoga konoida **K'** znamo dosada njegove dvije dvostruke pravčaste ravnalice $m' \equiv i$, gdje je i okomica na ravninu xy dignuta u dvostrukoj točki $J \equiv M'$ (sl. 1.), te $n'_\infty \equiv n_\infty$, t. j. neizmjerno daleki pravac ravnine xy. Od njegove treće ravnalice, elipse e', znamo samo to, da leži na uspravnom valjku, kojemu je osnovka kružnica l', određena jednadžbama (51) i (52), i u izvjesnoj ravnini **E'**, od koje je zasada poznat samo trag e_1', naime tangenta kružnice l' s diralištem E_1', paralelna sa e_1; gornji trag $e_2'^*$ te ravnine, dakle ni visina v' valjka, još nisu poznate. Ravnina **E'** ima jednadžbu

$$ax + by + c'z + d' = 0, \quad (54)$$

budući da s obzirom na relaciju (40) i zbog homogenosti koeficijenata u jednadžbi ravnine možemo uzeti:

$$a' = a, \qquad b' = b. \quad (55)$$

Pri tom su konstante p', q', r'; a', b', c', d'; v' konoida **K'** vezane istim uvjetnim relacijama kao i pripadne konstante zadanoga konoida **K**, te imamo prema (9) i (10):

$$\begin{aligned} 2(ap' + bq' + d') + c'v' &= 0, \\ 4(a^2 + b^2) r'^2 &= c'^2 v'^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Točnije određenje veličina c', d', v', koje su tu još jedine neodređene, dobit ćemo na osnovu zahtjeva, da taj drugi konoid **K'**, presječen ravninom Γ', koja s obzirom na (38), dakle s obzirom na jednakosti

$$A' = A, \qquad B' = B, \quad (57)$$

ima jednadžbu

$$Ax + By + C'z + D' = 0, \quad (58)$$

mora dati krivulju k', istovetnu s krivuljom k. Ova istovetnost $k' \equiv k$ ima naime nužnu posljedicu, da prema onome, što je rečeno na koncu čl. 2., mora biti $g_1' \equiv g_1$, $g_2' \equiv g_2$, dok $g_2'^*$ može biti eventualno i različito od g_2^*. No pravci g_1', g_2' imaju prema (58) jednadžbe:

$$z = 0\,, \qquad Ax + By + D' = 0\,;$$
$$z = 0\,, \qquad Ax + By + (C'v' + D') = 0\,,$$

a to, isporedeno sa (17), daje za $g_1' \equiv g_1$:

$$D' = D\,, \tag{59}$$

i spomoću toga za $g_2' \equiv g_2$:

$$C'v' = Cv\,. \tag{60}$$

Ovo su dvije važne relacije, jer znače odraz osnovnog, »planimetrijskog«, identiteta $k' \equiv k$ na prostornu konfiguraciju našega problema. Spomoću njih možemo naime odrediti sada one još neodređene veličine c', d', v', i to ovako: iz pretposljednje jednadžbe (38) izlazi s obzirom na (19), zatim s obzirom na (55), (57) i (59):

$$\frac{(c'B - bC')(ax_0' + by_0') + b(c'D - d'C')}{c'(aB - bA)} = x_0\,; \tag{61}$$

no s obzirom na prve dvije jednadžbe (38) i opet na jednadžbu (19) [ili geometrijski: iz činjenice, da je $MJ \parallel e_1$, što nalazi svoj analitički izražaj u jednadžbi (34)] imamo:

$$ax_0' + by_0' = ax_i + by_i = ax_0 + by_0 \tag{62}$$

tako, da iz (61) izlazi

$$(c'B - bC')(ax_0 + by_0) + b(c'D - d'C') = c'(aB - bA)\,x_0.$$

Pomnožimo li to sa v' i uvažimo relacije (56) i (60), dobivamo za d' formulu

$$d' = -\frac{2(ap' + bq')(Ax_0 + By_0 + D) + Cv(ax_0 + by_0)}{2(Ax_0 + By_0 + D) + Cv}\,, \tag{63}$$

spomoću čega prva jednadžba (56) daje:

$$c'v' = -2\,\frac{Cv[a(p' - x_0) + b(q' - y_0)]}{2(Ax_0 + By_0 + D) + Cv}\,. \tag{64}$$

Time su veličine d' i $c'v'$ određene kao funkcije parametra σ', jer su kao funkcije tog slobodnog parametra određene i veličine p', q', vidi formule (51).

Zbog (59) i (60) glasi dakle jednadžba (58) ravnine Γ':

$$Ax + By + \frac{v}{v'}\,Cz + D = 0\,, \tag{65}$$

a odatle se vidi, da će za $z = 0$ i $z = v'$ biti doista $g_1' \equiv g_1$ odnosno $g_2' \equiv g_2$. No iz te se jednadžbe razabira i to, da se ravnina Γ' dade izvesti iz ravnine Γ spomoću jedne posve specijalne afine transformacije, naime spomoću pružanja u smjeru osi z po modulu $\frac{v'}{v}$. Za odnos ravnina $\mathbf{E}$ i $\mathbf{E}'$ to ne vrijedi, jer prema (63) i (64) veličine d' i $c'v'$ u jednadžbi ravnine $\mathbf{E}'$ zavise zbog (51) još i od slobodnog parametra σ', a zbog toga nije više ni $e_1' \equiv e_1$ ni $e_2' \equiv e_2$, dakle nema mogućnosti za ono pružanje.

Visina v' drugoga konoida $\mathbf{K}'$ uopće se ne da izračunati, ona ostaje slobodna, kaošto je kod izračunavanja planimetrijskih veličina p', q', r' ostala slobodna veličina σ'. Ova mijenja na ∞^1 načina osnovnu kružnicu l' konoida $\mathbf{K}'$, kako smo to vidjeli u čl. 5., a v' mijenja na ∞^1 načina prostorne elemente toga konoida (naime ravninu $\mathbf{E}'$ i s njom elipsu e') i krivulje k'^* (t. j. ravninu Γ'). A ta su dva mijenjanja među sobom posve nezavisna, t. j. parametri σ' i v' mogu se po volji odabirati nezavisno jedan od drugoga, a ipak će za svaki njihov izbor biti sigurno $k' \equiv k$.

Ima dakle ∞^1 konoida $\mathbf{K}'$, koji se među sobom razlikuju po svojoj visini v', dakle i po svojoj elipsi-ravnalici e', dok im je kružnica l' zajednička. Zajedničke su im i obadvije pravčaste dvostruke ravnalice $m' \equiv i$ i $n_\infty' \equiv n_\infty$, za koje ćemo u idućem članu vidjeti, da zapravo predočavaju nosioce degeneriranih elipsa e'.

Zadavši vrijednost od σ', poznate su prema (51), (52) i (63) veličine p', q', r' i d', a zadavši vrijednost od v', poznate su prema (60) i (64) i veličine c', C', te je prema tome tada potpuno određen i konoid $\mathbf{K}'$ i ravnina Γ', a s njima i krivulja $k' \equiv k$.

U sl. 4. predočen je (u aksonometrijskoj projekciji kao u sl. 1.) uz zadani konoid $\mathbf{K}$ još i konoid $\mathbf{K}'$ iste visine kao zadani ($v' = v = 12$), a osnovka l' mu ima polumjer $r' = 7$; tu je povrh $k' \equiv k$ još i $k'^* \equiv k^*$. Nad tom istom osnovkom l' konstruiran je još i drugi konoid $\mathbf{K}'$, za koji je $v' \neq v$ i to $v' = 18$; tu je dakako još $k' \equiv k$, ali $k'^* \neq k^*$, jer je sada i $\mathbf{E}' \neq \mathbf{E}$.

7. Parametar σ' znači geometrijski koeficijent smjera pravca s', koji je xy-projekcija presječnice s'^* ravnina $\mathbf{E}'$ i Γ' i koji prema (28) ima jednadžbu

$$y = \sigma' x + \tau'\,.$$

A zbog istih geometrijskih razloga, zbog kojih pravac s prolazi dvostrukom točkom J krivulje k, ići će pravac s' dvostrukom točkom $J' \equiv M$ krivulje $k' \equiv k$ (sl. 2.). Geometrijska je zadaća, koju parametar σ' ima pri tome, ova: kada se σ' neprekidno mijenja, opisuje pravac s' pramen, kojemu je vrh točka $J' \equiv M$; svakom pravcu s' toga pramena pripada posve određena ravnina $\mathbf{E}'$ (pošto je odabrana po volji, ali onda držana čvrstom vrijednost visine v' konoida $\mathbf{K}'$) i posve određena kružnica l', dakle i posve određena elipsa-ravnalica e' (sl. 4.), a prema svemu tome i posve određeni konoid $\mathbf{K}'$. Ravnina $\mathbf{E}'$ izvodi pri tom svezak ravnina, kojemu je os dvostruka izvodnica h'^* konoida $\mathbf{K}'$; ta se određuje posve jednako kao dvostruka izvodnica h^* konoida $\mathbf{K}$: h'^* je naime presječnica ravnine $\mathbf{E}'$ i ravnine Φ, koju smo trebali već u čl. 1., a koja je sada određena kao ravnina dvostrukom ravnalicom $m' \equiv i$ konoida $\mathbf{K}'$ paralelna sa $e_1' \parallel e_1$. Zbog $MJ \equiv J'M' \parallel e_1$ mora dakako biti $h' \equiv h \equiv MJ$.

Jednadžbe dvostruke izvodnice h'^* glase prema (13) i (14) i s obzirom na (62):

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0\,,$$

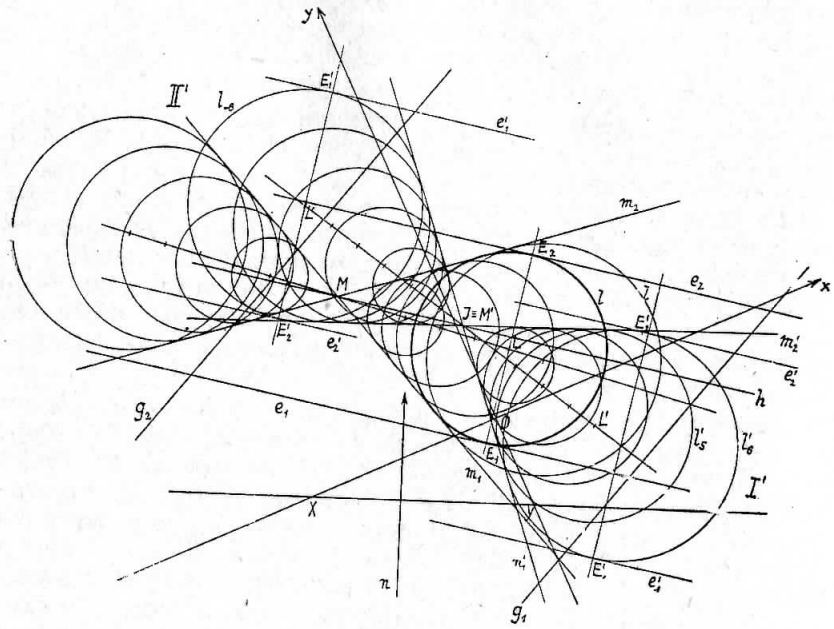
$$z = -\frac{1}{c'}\,(ax_0 + by_0 + d')\,,$$

gdje za c', d' treba unijeti vrijednosti iz (63) i (64).

U svesku ravnina $[h'^*]$ su dvije osobite ravnine $\mathbf{E}'$, za koje degenerira valjak (l', v'), a s njim i elipsa-ravnalica e'. To su ravnine Φ i Π', od kojih je prva okomita na ravninu xy, a druga paralelna s ravninom xy; u prvom je slučaju $e_1' \equiv e_2' \equiv h'$, te se kružnica l' steže na točku $M' \equiv J$, a valjak i elipsa na dužinu $\overline{MM_2}^*$; a u drugom slučaju odmakli su pravci e_1', e_2' u beskonačnost ravnine xy, te je kružnica l', a s njom i valjak i elipsa u neizmjerno dalekom pravcu n_∞ te ravnine. Prvom slučaju odgovara vrijednost $\sigma' = \gamma$, jer je $s' \equiv h'$, a drugom vrijednost $\sigma' = \alpha$, jer je $s' \parallel g_1$, pa nam spomoću tih vrijednosti za σ' formule (51) i (52) potvrđuju i analitički činjenice, koje smo malo prije izrekli na osnovu geometrijskih razmatranja.

Te dvije među sobom okomite ravnine Φ i Π' dijele prostor u četiri kvadranta, a svezak ravnina $[h'^*]$ u dva dijela tako, da se jedan dio sastoji od ravnina $\mathbf{E}'$, koje, prolazeći kroz os h'^* sveska, leže u jednom paru vršnih kvadranata, a drugi od ravnina $\mathbf{E}'$, koje leže u drugom paru. A pri tom treba istaknuti važnu činjenicu, da dužina $\overline{E_1' E_2'}$, t. j. dodirni promjer kružnice l' za paralelne tangente e_1', e_2', mijenja svoj smisao u protivni, kada

ravnina $\mathbf{E}'$, vrteći se oko osi h'^*, prijeđe iz jednog od ona dva dijela sveska u drugi (sl. 3.). Smjer te dužine $\overline{E_1' E_2'}$ ostaje dakako nepromijenjen, naime okomit na čvrsti smjer e_1. Još točnije možemo opisanu pojavu označiti ovako: tragovi e_1', e_2' ravnine $\mathbf{E}'$ mijenjaju kod prijelaza te ravnine kroz ravninu Φ ili Π' svoj položaj prema pravcu $h' \equiv h$ (ostajući uvijek s njim paralelni); ako su prije toga prijelaza bili na protivnim stranama pravca h', tada to ostaju i poslije njega, samo što zamijene te



Sl. 3.

strane (sjedinjujući se u času prijelaza u pravcu h'); no ako su bili na istoj strani pravca h', tada zajedno prelaze na drugu stranu, ali tako, da onaj od njih, koji je prije bio bliži pravcu h', bude poslije dalji i obrnuto. U svakom se dakle slučaju ta dva traga e_1', e_2' prebace jedan preko drugoga (sl. 3.) i zbog toga orijentirana dužina $\overline{E_1' E_2'}$ mijenja svoj smisao.

Sve ravnine $\mathbf{E}'$ iz jednog od opisana dva dijela sveska $[h'^*]$ pripadaju vrijednostima σ', koje se nalaze u intervalu (α, γ), dok ravnine $\mathbf{E}'$ iz onog drugog dijela dobivamo za vrijednosti σ' izvan toga intervala; međama intervala, t. j. vrijednostima $\sigma' = \alpha$ i $\sigma' = \gamma$, odgovaraju one dvije osobite ravnine Φ i Π'.

A kružnice l', za koje je u čl. 5. utvrđeno da čine sustav od ∞^1 homotetičnih kružnica s točkom $M' \equiv J$ kao središtem homotetije, te pravcima m_1', m_2' iz (53) kao zajedničkim tangentama, nalaze se posredstvom ravnina $\mathbf{E}'$ sveska $[h'^*]$ u recipročno jednoznačnoj korespondenciji s pravcima s' pramena $[J' \equiv M]$, i to tako, da za vrijednosti σ' iz intervala (α, γ) dobivamo kružnice l', što leže u jednom od ona dva vršna kuta (m_1', m_2'), u kojima se uopće nalaze sve kružnice l' (sl. 3.), a za vrijednosti σ' izvan onoga intervala kružnice l' u drugom od ona dva vršna kuta. Međašnim vrijednostima $\sigma' = \alpha$ odnosno $\sigma' = \gamma$ pripadaju, kako je već spomenuto, degenerirane kružnice l', naime točka $M' \equiv J$ odnosno neizmjerno daleki pravac n_∞ ravnine xy.

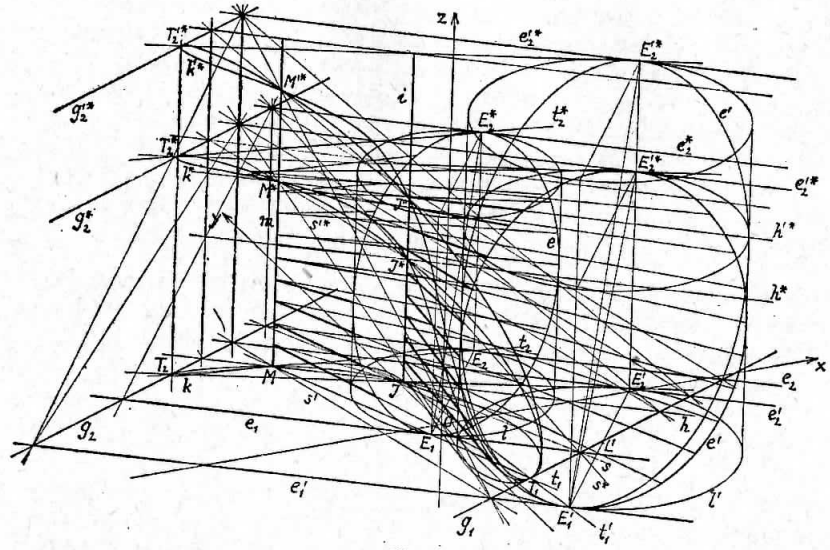
Svaka ravnina $\mathbf{E}'$ siječe svoj pripadni valjak (l', v') u posve određenoj elipsi e' kao nepravčastoj ravnalici konoida $\mathbf{K}'$[6]. Taj ima dakle ∞^1 eliptičnih ravnalica, koje su u toj svojoj funkciji među sobom posve ravnopravne, t. j. svaka od njih može služiti za izvođenje konoida $\mathbf{K}'$. Tim je elipsama osobito svojstvo, što se na ravninu xy kao direkcionu ravninu konoida normalno projiciraju u kružnice, naime u kružnice l'. A to svojstvo ima svoj izvor u tome, što elipsa-ravnalica e originalnog konoida $\mathbf{K}$ leži na kružnom valjku. Ova je kružnost uostalom i uzrok cirkulariteta krivulje k.

I mijenjanje drugog slobodnog parametra v' povlači za sobom mijenjanje izvjesnih geometrijskih veličina i objekata. U prvom se redu mijenja visina valjka (l', v'), dakle i konoida $\mathbf{K}'$. Zatim se mijenja ravnina $\mathbf{E}'$, ali tako, da joj trag e_1' ostaje nepromijenjen, ako je — kako sada moramo uzeti — ostala nepromijenjena kružnica l' kao osnovka onoga valjka; mijenja se gornji trag $e_2'^* \equiv \mathbf{E}' \times \Delta'$ (sl. 4.), gdje je Δ' ravnina, paralelna s ravninom xy u udaljenosti v' od nje. Napokon se sa v' mijenja i ravnina Γ', ali opet tako, da joj trag g_1 ostaje nepromijenjen, a trag $g_2'^* \equiv \Gamma' \times \Delta'$ mijenja se zajedno s ravninom Δ'. Tragovi $e_2'^*$, $g_2'^*$ moraju po svom značenju biti uvijek u istoj ravnini Δ'. No pri svem tom je važno, da xy-projekcije tih tragova ostaju nepromijenjene kakogod se mijenjala visina v' (za čvrstu kružnicu l'), a to zbog geometrijskih razloga, koji su očevidni (pogotovu na osnovu naših slika).

Sve se to može lako i sasvim analitički izvesti iz formula (63) i (64) za ravninu $\mathbf{E}'$, odnosno (49) i (60) za ravninu Γ'. Na osnovu jednačaba (63) i (59) sigurno je, da će e_1' i g_1' ostati za

[6] Svaka od tih elipsa e' znači u društvu sa dvostrukom izvodnicom h'^* degeneriranu krivulju 4. reda kao presjek konoida $\mathbf{K}'$ s pripadnom ravninom $\mathbf{E}'$.

svaku vrijednost v' isti, jer u njima uopće ne dolazi taj parametar. Za pravce e_2', g_2' vrijedi to isto tek onda, ako u jednadžbi (54) i (58) ravnine $\mathbf{E}'$ odnosno Γ' stavimo $z = v'$, jer kako veličine $c'v'$ i $C'v'$, dane formulama (64) i (60), ne zavise od v', izlazi, da su onda i čitavi »konstantni« članovi $c'v' + d'$ i $C'v' + D'$ u jednadžbama (54) i (58) konstantni s obzirom na veličinu v'. No te jednadžbe, uzete zajedno s jednadžbom $z = 0$, znače upravo pravce e_2', g_2', dok zajedno s jednadžbom $z = v'$ daju pravce $e_2'^*$, $g_2'^*$; ta se dva pravca dakle mijenjaju sa v', dok ona dva ostaju nepromijenjena. Iz jednačaba (59), (60), (63) i (64), kojima



Sl. 4.

su određene veličine D', C', d', c', vidi se uopće posve jasno ovo: veličina D' je konstanta u odnosu na promjenljive parametre σ' i v', veličina C' zavisi samo od v', a veličina d' samo od σ' (taj je sadržan u p' i q'), dok veličina c' zavisi od obadva parametra σ' i v'. Sve te činjenice imaju geometrijsko značenje, koje smo već dovoljno objasnili.

Iz jednačaba (60) i (64) možemo napokon izvesti zaključak, da je za $v' = v$ veličina $C' = C$, dakle konstantna i prema tome $\Gamma' \equiv \Gamma$, dok je veličina c' zavisna još samo od parametra σ', na što se onda nadovezuje sve ono, što je rečeno o mijenjanju ravnine $\mathbf{E}'$ u prvom dijelu ovoga članka, gdje smo razmatrali mijenjanje parametra σ'.

Za negativne visine v' nalazi se elipsa e', dakle i konoid $\mathbf{K}'$, a s ovim i presječna krivulja k'^*, ispod ravnine xy, jer tada prema formulama (64) i (60) mijenjaju svoj predznak veličine c' i C', a to znači, da onaj dio ravnine $\mathbf{E}'$ i I'', koji generira elipsu e' odnosno krivulju k'^*, odlazi ispod ravnine xy.

Za čvrsto σ' i promjenljivo v' čine dakle ravnine $\mathbf{E}'$ svezak ravnina, kojemu je os trag e_1', a ravnine I'' svezak s osi g_1'. Elipse e' u ravninama $\mathbf{E}'$ leže sve na istoj cilindričnoj plohi s bazom l', idu dakle sve istom točkom $\mathbf{E}'_1$ i imaju u njoj zajedničku tangentu e_1', te se zbog toga i one same u toj točki diraju (sl. 4.); točke $E_2'^*$ tih elipsa, dijametralne točki E_1', leže sve na istoj izvodnici one cilindrične plohe. Za krivulje k'^* imamo sličan odnos: sve se one diraju u točki T_1 (sl. 4.), jer tu imaju zajedničku tangentu g_1, dok točke T_2^* leže sve na istom pravcu, dignutom u točki T_2 okomito na ravninu xy; ta je okomica izvodnica cilindrične plohe 4. reda, kojoj je ravnalica krivulja k u ravnini xy i na kojoj leže sve krivulje k'^*.

Sve se te ravnine $\mathbf{E}'$, sve elipse e', svi konoidi $\mathbf{K}'$, sagrađeni na ovima, zatim sve ravnine I'' i sve krivulje k'^* nalaze u specijalnom afinom srodstvu: pružanju u smjeru osi z.

8. U svezi s izloženim možemo sada objasniti geometrijsko značenje dvoznačnosti, koja je sadržana u formuli (52) za kvadrat polumjera r', odnosno u drugoj formuli (56) za kvadrat veličine $c'v'$, jer iz tih formula izlazi:

$$r' = \pm \frac{\gamma - \sigma'}{\sigma' - \alpha} \cdot \frac{\sigma - \alpha}{\gamma - \sigma} r, \qquad c'v' = \pm 2r' \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{66}$$

gdje veličinu $\sqrt{a^2 + b^2}$ treba sada uzeti apsolutno. Posljednja dva faktora na desnoj strani u prvoj od te dvije jednadžbe imaju posve određeni stalan predznak, jer u njima dolaze same zadane veličine, naime veličine određene zadanim konoidom $\mathbf{K}$. Predznak prvoga faktora se mijenja, te zavisi o vrijednosti parametra σ': ako se ta vrijednost nalazi u intervalu (α, γ), tada je razlomak $\frac{\gamma - \sigma'}{\sigma' - \alpha}$ pozitivan, dok je u protivnom slučaju negativan; na međama intervala je vrijednost toga razlomka za $\sigma' = \gamma$ jednaka nuli, a za $\sigma' = \alpha$ neizmjerno velika, te na tim mjestima ona mijenja svoj predznak.

Ne ulazeći u pobližu analizu svih mogućih slučajeva, koji se mogu javiti s obzirom na kombinacije predznaka posljednjih dvaju faktora, možemo kao rezultat te analize reći ovo: ako jedan od dva vršna kuta (m_1', m_2'), u kojima se nalaze kružnice l', označimo sa I', a drugi sa II' (sl. 3.), sve će kružnice u I' imati

polumjere r' istoga predznaka, jer su sve dužine $\overline{E_1' E_2'}$ istoga smisla, dok će polumjeri r' svih kružnica u II' imati opet isti predznak, ali će taj biti protivan predznaku u I'; tada naime sve dužine $\overline{E_1' E_2'}$ imaju smisao protivan smislu u I', kako je bilo istaknuto u čl. 7. Uzmimo sada, da smo se u prvoj formuli (66) odlučili za predznak $+$, a predznaci triju faktora desne strane neka su takvi, da zajedno s tim predznakom $+$ čine sve polumjere r' u I' pozitivnima, i prema tome polumjere u II' negativnima; tada bi predznak — u prvoj formuli (66) značio samo to, da su polumjeri r' u I' negativni, a u II' pozitivni. No ta promjena nema nikakva geometrijskog značenja, jer nije važno, koji predznak imaju polumjeri r' u I' odnosno u II', već je važno to, da u I' imaju predznak protivan predznaku u II'. A to je osigurano jednako predznakom $+$ kao i predznakom — u onoj formuli; dvoznačnost te formule dakle ne donosi geometrijski ništa novo, nego naprosto znači dvovrsno, među sobom posve ravnopravno, predznačivanje geometrijskih objekata, koji već postoje. Na osnovu toga možemo dakle u prvoj formuli (66) uzeti predznak $+$ i pisati definitivno jednoznačno[7]:

$$r' = \frac{\gamma - \sigma'}{\sigma' - \alpha} \cdot \frac{\sigma - \alpha}{\gamma - \sigma} r. \tag{67}$$

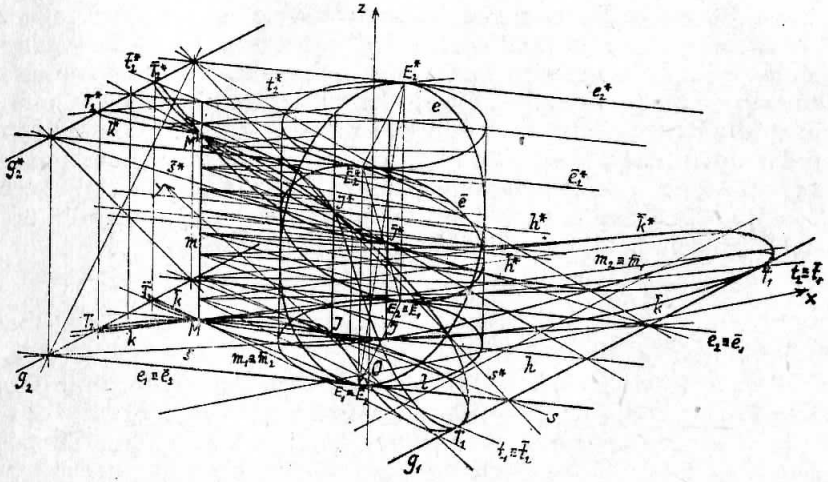
Prelazeći na istraživanje dvoznačnosti u drugoj formuli (66), konstatirat ćemo najprije, da za veličinu $c'v'$ imamo dvije formule: upravo spomenutu formulu (66) i formulu (64). Ta posljednja daje $c'v'$ kao funkciju parametra σ', koja ima posve određen predznak; a prva mora dati za veličinu $c'v'$ onu istu funkciju od σ', samo što ta sada ima dvostruk predznak. A jasno je, da od ta dva predznaka treba uzeti onaj, koji je u skladu s predznakom, što ga daje formula (64). Označimo li dakle desnu stranu formule (64) sa w, njezin predznak sa $sgnw$, morat ćemo drugu formulu (66) pisati u obliku

$$c'v' = (sgn\, w)\, 2r' \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{68}$$

No i s tako utvrđenim predznakom na desnoj strani mijenjat će veličina $c'v'$ svoj predznak s predznakom polumjera r' (koji je sada jednoznačan), jer smo malo prije vidjeli, da r' mijenja svoj predznak, kada kružnica l' prijeđe iz područja I' u područje

[7] Po formuli (67) izlazi u sl. 3. [koja je crtana po numeričkim podatcima slike 1. i 2., vidi bilješke [1] i [2]] kut I' kao kut pozitivnih, a II' kao kut negativnih polumjera r'. U bilješci [5] još nismo razlikovali pozitivne i negativne polumjere r', nego su svi uzeti apsolutno.

II'. Za čvrsto odabranu visinu v' to znači, da će tada c' mijenjati svoj predznak, a to je posve u skladu s činjenicom, koju smo utvrdili u čl. 7., da naime kod prijelaza kružnice l' iz I' u II' dodirni promjer $\overline{E_1' E_2'}$ mijenja svoj smisao ili za ovaj čas još točnije, da se tragovi e_1', e_2' kod spomenutoga prijelaza prebacuju jedan preko drugoga. Ravnina $\mathbf{E}'$ pri tom mijenja svoj položaj prema osi z tako, da kut, što ga ona čini s pozitivnim smislom te osi, postaje iz oštroga tup ili obrnuto, a to upravo znači, da treći koeficijent smjera normale ravnine $\mathbf{E}'$ mijenja svoj predznak.



Sl. 5.

No javlja se samo od sebe pitanje, što znači onda onaj drugi predznak u drugoj formuli (66), dakle predznak $-sgnw$. Nije teško uvidjeti, da će tada za čvrsto odabrano v' svaka ravnina $\mathbf{E}'$ prijeći u svoju antiparalelnu ravninu $\overline{\mathbf{E}}'$ s obzirom na ravninu Φ (čl. 1. i 7.) i to onu, koja ide polovištem osi pripadnog valjka (l', v'); tim polovištem ide dakako i sama ravnina $\mathbf{E}'$ (sl. 5.)[8]. Ako dakle »tragove« ravnine $\overline{\mathbf{E}}'$ označimo sa $\bar{e}_1'$, $\bar{e}_2'$, $\bar{e}_2'^*$, mora biti

$$\bar{e}_1' \equiv e_2', \qquad \bar{e}_2' \equiv e_1', \tag{69}$$

[8] Ova slika pripada zapravo članu 9., jer vrijedi za analogna razmatranja o veličini cv i pripadnim elementima, koji nisu crticama označeni: ravnini $\overline{\mathbf{E}}$, njezinim tragovima $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_2^*$ i t. d.; no ona može ipak dobro poslužiti kao ilustracija naših sadašnjih razmatranja s time, da sve njezine elemente, koji pri tom dolaze u obzir, zamislimo u slici označene crticom.

dok trag $\bar{e}_2'^*$ leži u ravnini Δ' (čl. 7.) tako, da njegova xy-projekcija pada u e_1'. Elipsa e' prelazi pri tom u svoju »antiparalelnu« elipsu $\bar{e}'$, a konoid $\mathbf{K}'$ u svoj »antiparalelni« konoid $\overline{\mathbf{K}}'$, koji ćemo unaprijed zvati *konoidom-blizancem* konoida $\mathbf{K}'$. Pri svem su tome pravčaste ravnalice $m' \equiv i$ i $n'_\infty \equiv n_\infty$ ostale nepromijenjene, a jednako je ostala nepromijenjena i presječna ravnina I', ova zbog toga, što u formulama (59) i (60) za D' i C' ne dolazi veličina $c'v'$, dakle promjena $sgnw$ u $-sgnw$ ne utječe na predznak veličina C' i D'. A jasno je po sebi, da ćemo tada mjesto krivulja k'^* i $k' \equiv k$ imati neke druge, s onima »antiparalelne« krivulje $\bar{k}'^*$ i $\bar{k}' \equiv k$ (sl. 5.).

Identiteti (69) mogu se uostalom izvesti i analitički. Ako naime izraz za $c'v'$ iz (66) unesemo u prvu jednadžbu (56), dobivamo jednadžbu

$$d' = -(ap' + bq') \mp r' \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{70}$$

a zbrojivši to s drugom jednadžbom (66), imamo:

$$c'v' + d' = -(ap' + bq') \pm r' \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{71}$$

Ravnina $\mathbf{E}'$ iz (54) ima u ravnini Δ' s jednadžbom $z = v'$ trag $e_2'^*$, a xy-projekcija e_2' toga traga ima spomoću (71) jednadžbe

$$z = 0, \qquad ax + by - [(ap' + bq') \mp r' \sqrt{a^2 + b^2}] = 0; \tag{72}$$

u drugu pak ruku trag e_1' ravnine $\mathbf{E}'$ u ravnini $z = 0$ ima iz (54) spomoću (70) jednadžbe:

$$z = 0, \qquad ax + by - [(ap' + bq') \pm r' \sqrt{a^2 + b^2}] = 0. \tag{73}$$

No jednadžbe (72) i (73) predočuju isti par pravaca, samo što je prvi pravac postao drugim, a drugi prvim; ako su dakle u (72) pravci e_2', e_2' a u (73) pravci e_1', $\bar{e}_1'$, dobivamo ispoređivanjem tih dviju jednačaba naše identitete (69).

Skupna jednadžba za dva konoida-blizanca $\mathbf{K}'$ i $\overline{\mathbf{K}}'$ dobiva se vrlo lako: konoid $\mathbf{K}'$ ima jednadžbu oblika (11) s dopunskim jednadžbama (12) tako, da u (11) i (12) sve konstante pišemo s crticom i onda uvažimo relacije (38) i (55); no unesemo li u tako preudešene relacije (12) za $c'v'$ dvoznačni izraz iz druge jednadžbe (66), dobili smo jednadžbu, koja istodobno predočuje obadva konoida $\mathbf{K}'$ i $\overline{\mathbf{K}}'$.

Posve analogno se iz jednadžbe (21) krivulje k i njezinih dopunskih jednačaba dobije skupna jednadžba za *krivulje-blizanke* k' i $\bar{k}'$, a pri tom treba uvažiti već spomenutu činjenicu,

da je $\bar{\Gamma}' \equiv \Gamma'$. Krivulje k' i $\bar{k}'$ leže u istoj pruzi $(g_1', g_2') \equiv (\bar{g}_1', \bar{g}_2') \equiv (g_1, g_2)$ i diraju međašne pravce njezine u točkama $T_1' \equiv g_1 \times t_1'$, $T_2' \equiv g_2 \times t_2'$ odnosno $\bar{T}_1' \equiv g_1 \times \bar{t}_1'$, $\bar{T}_2' \equiv g_2 \times \bar{t}_2'$ (sl. 5.). Za dvostruke točke M', J', N_∞' i $\bar{M}', \bar{J}', \bar{N}_\infty'$ krivulja $k', \bar{k}'$ vrijede identiteti $\bar{M}' \equiv M'$, $\bar{N}_\infty' \equiv N_\infty'$, dok je dvostruka točka $\bar{J}'$ različita od J' (u sl. 5. vrijedi to isto za elemente, koji nisu označeni crticama).

Za presječne krivulje k'^* i $\bar{k}'^*$ u ravnini Γ' vrijede slični odnosi kao za njihove projekcije k' i $\bar{k}'$.

9. Dokazavši u prethodnom razlaganju postojanje drugoga konoida **K'**, iz kojega izlazi krivulja 4. reda k u ravnini xy baš onako kao i iz originalnoga konoida **K**, dobili smo potvrdu našega zaključka, istaknutog u uvodu ove radnje, koji smo izveli iz apriorne spoznaje, da konačne dvostruke točke M i J krivulje k moraju biti među sobom ravnopravne. A iz te iste ravnopravnosti zaključujemo sada obrnuto, da sva ona svojstva konoida **K'**, koja smo našli dokazujući njegovu egzistenciju, moraju vrijediti i za prvobitni konoid **K**. Među tim svojstvima najbitnija su ova dva: 1) da za izvođenje konoida **K'** postoji ∞^1 elipsa-ravnalica e', svaka na svom valjku (l', v'), i 2) da se visina toga valjka, dakle i samoga konoida **K'**, može mijenjati po volji, a pri tom krivulja $k' \equiv k$ ostaje nepromijenjena. Kad bismo htjeli ta dva svojstva dokazivati za zadani konoid **K**, morali bismo ponoviti naša razmatranja i izvođenja od čl. 4. do čl. 7. s tom promjenom, da konoidi **K** i **K'** i njihovi pripadni ili popratni elementi zamijene među sobom svoje uloge. No to nije više potrebno, jer rješenje (51) + (67), (59) + (60) i (63) + (64) problema drugoga konoida **K'** sadržava u sebi već i rješenje »problema« prvoga konoida **K**. Uočimo li naime točnije strukturu jednačaba (51) i (67), spoznajemo lako, da su te jednadžbe u sebi simetrične s obzirom na elemente dvaju konoida **K**, **K'**. Ta je simetrija očigledna, ako spomenute jednadžbe spomoću relacija (38), (39) i (40) pišemo u obliku:

$$\frac{\sigma' - \alpha'}{\gamma' - \sigma'}(p' - x_0') - x_0' = \frac{\sigma - \alpha}{\gamma - \sigma}(p - x_0) - x_0,$$

$$\frac{\sigma' - \alpha'}{\gamma' - \sigma'}(q' - y_0') - \alpha' x_0' = \frac{\sigma - \alpha}{\gamma - \sigma}(q - y_0) - \alpha x_0; \qquad (74)$$

$$\frac{\sigma' - \alpha'}{\gamma' - \sigma'} r' = \frac{\sigma - \alpha}{\gamma - \sigma} r.$$

Simetrija jednačaba (59) i (60) u crticama označenim i njima neoznačenim veličinama očigledna je, a jednadžbe (63) i (64), koje su naoko nesimetrične, daju se dovesti na simetričan oblik; tako na pr. iz jednadžbe (10) i druge jednadžbe (56) izlazi:

$$\frac{c'^2 v'^2}{r'^2} = \frac{c^2 v^2}{r^2}. \qquad (75)$$

Prema tome postoji i za konoid **K** ∞^1 elipsa-ravnalica e, svaka na svom valjku (l, v), gdje je l kružnica, koja za promjenljivi parametar σ izvodi sustav od ∞^1 homotetičnih kružnica s dvostrukom točkom M kao središtem homotetije (sl. 3.).[9] A kad smo utvrdili kružnicu l, tada nad njom ima ∞^1 konoida **K**, koji odgovaraju isto tolikim vrijednostima visine v.

Iz svake po volji zadane kružnice l' dadu se izračunati kružnice l spomoću jednačaba (74), koje treba radi toga pisati ovako:

$$p - x_i' = \frac{\gamma - \sigma}{\sigma - \alpha}\left[(x_i' - x_0') + \frac{\sigma' - \alpha}{\gamma - \sigma'}(p' - x_0')\right],$$

$$q - y_i' = \frac{\gamma - \sigma}{\sigma - \alpha}\left[\alpha(x_i' - x_0') + \frac{\sigma' - \alpha}{\gamma - \sigma'}(q' - y_0')\right]; \qquad (76)$$

$$r = \frac{\gamma - \sigma}{\sigma - \alpha} \cdot \frac{\sigma' - \alpha}{\gamma - \sigma'} r'.$$

Te su jednadžbe točni dualistikum jednačaba (51) i (67); u njima su α, γ i sve crticama označene veličine sada poznate, p, q, r nepoznate, a σ je slobodan parametar. Kružnica l, zadana u (1), od koje smo pošli u našim razmatranjima, samo je jedan individuum iz sustava od ∞^1 kružnica, određenih jednadžbama (76); u sl. 3. ta je kružnica nešto jače iscrtana.

Zajedničke tangente m_1, m_2 kružnica l, povučene iz središta homotetije M, ujedno su tangente, koje se daju iz te točke kao dvostruke točke krivulje k povući na tu krivulju (vidi konac čl. 5.); one su dane jednadžbom, koja je »recipročna« jednadžbi (53) tako, da u njoj zamijenimo među sobom pripadne elemente dvaju konoida **K** i **K'**.

Svaka kružnica l sustava (76) pripada jednom određenom pravcu s pramena, kojemu je vrh dvostruka točka J krivulje k, pravcu s izvjesna ravnina **E** sveska, kojemu je os dvostruka

[9] U toj su slici predočene kružnice l sa $r = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$ a za vrijednosti parametra σ točno jednake vrijednostima u bilješci [5] (obrazloženje u tekstu).

izvodnica h^* konoida **K**, a ravnini **E** posve određena elipsa-ravnalica e toga konoida; pravac s je xy-projekcija presječnice $s^* \equiv \mathbf{E} \times \Gamma$, a elipsa e je presjek valjka (l, v) s ravninom **E**. Za mijenjanje tih elemenata, t. j. pravca s, kružnice l, ravnine **E** i elipse e, vrijedi sve ono, što je u čl. 7. rečeno za mijenjanje pripadnih crticama označenih objekata.

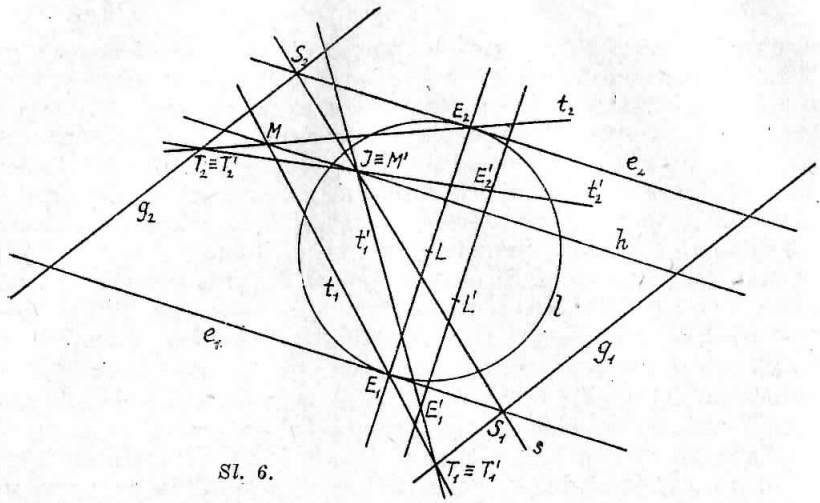
S tim u svezi treba istaknuti zanimljivu činjenicu, da su naime za dvije jednako velike kružnice l, l', kojima su polumjeri označeni jednakim predznacima, pripadni pravci s, s' među sobom paralelni. Analitički to izlazi za $r' = r$ iz treće jednadžbe (76), a geometrijski iz činjenice, da su pruge (e_1, e_2) i (e_1', e_2') sada jedna s drugom paralelne, jednake širine i jednako orijentirane, što se tiče smještaja njihovih međašnih pravaca; iz toga svega naime izlazi, da su pripadne ravnine **E**, **E**′ među sobom paralelne, dakle vrijedi isto i za njihove presječnice s^*, s'^* s ravninom Γ, a po tome onda i za njihove projekcije, t. j. pravce s, s'.

U čl. 6. smo vidjeli, da su parametri σ', v' konoida **K**′ među sobom nezavisni, a isto vrijedi onda i za parametre σ, v konoida **K**. A što se tiče zavisnosti parametara σ', v' o parametrima σ, v i obrnuto, možemo reći ovo: dokle god ostajemo samo kod zahtjeva $k' \equiv k$, sva su ta četiri parametra među sobom posve nezavisna, jer se u jednadžbama (74), (60), (63) i (64) daju ostale konstante udesiti tako, da pripadni konoidi **K** i **K**′ ispunjavaju onaj zahtjev. Bit će to dakako pod uvjetom, da općenito uzevši bude $k'^* \neq k^*$, jer je tada i $\Gamma' \neq \Gamma$ [ma da je $g_1' \equiv g_1$, $g_2' \equiv g_2$, ipak može biti $g_2'^* \neq g_2^*$, vidi jednadžbe (16) i (65)]. Takav slučaj predočen je u sl. 4. Tek ako pooštrimo zahtjev tražeći, da bude još i $k'^* \equiv k^*$, dakle i $\Gamma' \equiv \Gamma$, mora po jednadžbi (65) biti $v' = v$, a to znači, da parametar v' tada više nije slobodan. (U tom je slučaju krivulja $k'^* \equiv k^*$ samo jedan dio presjeka odnosnih dvaju jednako visokih konoida **K**, **K**′ (sl. 4.), pa bi se moglo pitati, kakav je njihov potpun presjek. No istraživanje toga, kao i geometrijskih tvorevina, koje su s tim u svezi, izlazi iz okvira ove radnje).

Napokon za dvoznačnost veličine cv, za koju iz jednadžbe (10) izlazi izraz

$$cv = \pm 2r\sqrt{a^2 + b^2},$$

vrijedi sve ono, što smo u prethodnom članku kazali o dvoznačnosti veličine $c'v'$, a to se sve može skupiti u ovo: svaki konoid **K** ima svoj konoid-blizanac $\overline{\mathbf{K}}$, a svaka krivulja k^* odnosno k svoju krivulju-blizanku $\overline{k}^*$ odnosno $\overline{k}$. U sl. 5. predočen je ko-



Sl. 6.

noid **K** i krivulje k^*, k iz sl. 1. sa svojim konoidom-blizancem i krivuljama-blizankama, i to u istoj aksonometrijskoj projekciji.[10]

10. Pokazat ćemo još, kako se iz grafički zadanih planimetrijskih odredbenih komada krivulje k, dakle iz zadane kružnice l i njezinih dviju paralelnih tangenata e_1, e_2, dvostruke točke M i tangenata g_1, g_2 krivulje k iz neizmjerno daleke dvostruke točke N_∞[11] konstruira bilo koja kružnica l'. Sve, što je potrebno za tu konstrukciju, imamo već izloženo u prethodnim članovima na raznim mjestima, a sada treba samo skupiti to u jednu cjelinu. Prije svega odredimo treću dvostruku točku J kao sjecište pravaca h i s (sl. 6.) gdje je h paralela sa e_1 dvo-

[10] Jednadžba ravnine $\overline{\mathbf{E}}$ glasi: $18x + 24y + 25z + 42 = 0$, a konoida $\overline{\mathbf{K}}$:

$$25[(x+5)^2 + (y-9)^2]z^2 - 12[(x+5)^2 - 10(x+5)(y-9) + 46(y-9)^2]z + 144[(x+5) + 5(y-9)]^2 = 0,$$

dok je ravnina $\Gamma' \equiv \Gamma$. Krivulja k ima jednadžbu:

$$25[(x+5) - 2(y-9)]^2[(x+5)^2 + (y-9)^2] - 2[(x+5) - 2(y-9)][952(x+5)^2 + 230(x+5)(y-9) - 83(y-9)^2] + [38347(x+5)^2 + 39100(x+5)(y-9) + 8401(y-9)^2] = 0,$$

a dvostruke točke krivulje $\overline{k}^*$ jesu:

$$\overline{M}^* \equiv M^*,\ \overline{N}_\infty^* \equiv N_\infty^* \text{ i } \overline{J}^*\left(\frac{313}{125}, \frac{843}{250}, \frac{132}{25}\right);$$

prema tome je $\overline{J}^*$ različito od J^*, ali tako, da su tri točke M^*, J^*, $\overline{J}^*$ kolinearne, budući da je $\overline{h} \equiv h$ (radi $\overline{\Phi} \equiv \Phi$; gl. sl. 5.).

[11] Ti komadi odgovaraju prostorno zadanoj konfiguraciji, koja određuje krivulju k: valjku (l, v), ravnini **E**, dvostrukoj ravnalici m i time konoidu **K** i ravnini Γ.

strukom točkom M, a s spojnica sjecišta $S_1 \equiv e_1 \times g_1$, $S_2 \equiv e_2 \times g_2$ (čl. 3.); zatim odredimo točke T_1, T_2, u kojima »torzalni« pravci $t_1 \equiv ME_1$, $t_2 \equiv ME_2$ sijeku pravac g_1 odnosno g_2, jer su to točke krivulje k, i to dirališta njezina s pravcima g_1, g_2 (čl. 2.); pravci JT_1, JT_2 moraju biti »torzalni« pravci t_1', t_2' krivulje $k' \equiv k$, jer je $J \equiv M', T_1 \equiv T_1', T_2 \equiv T_2'$ (čl. 2.); a budući da tangente e_1', e_2' svake kružnice l' moraju biti paralelne sa e_1' i to tako, da njihova dirališta E_1', E_2' sa l' moraju ležati na e_1' odnosno e_2' (čl. 1.), i prema tome mora dodirni promjer $E_1'E_2'$ biti okomit na e_1, treba samo povući bilo koju okomicu pravca e_1 i odrediti njezina sjecišta E_1', E_2' sa t_1' odnosno t_2': tako dobivena dužina $\overline{E_1'E_2'}$ promjer je kružnice l', a po tome je onda ta kružnica određena. Odmah je jasno, kako bi se sada konstruirala i kružnica l' zadane veličine, t. j. zadanoga polumjera r'.

Ta je konstrukcija kružnice l' dana u klasičnom, sintetičkom stilu, no ima još i druga, »analitička« ili »koordinatna«; ova se osniva na formulama (51) i (67), kojima je kružnica l' određena analitički, t. j. spomoću koordinata, pa zbog toga i sama ta druga konstrukcija radi s koordinatnim sustavom Oxy. S obzirom na geometrijsko značenje veličina α, γ, σ, σ', koje dolaze u spomenutim formulama, uvest ćemo za kutove, što ih pripadni pravci g_1, e_1, s, s' čine s pozitivnim smislom osi x oznake A, C, S, S' bez bojazni, da bi mogla nastati zabuna zbog toga, što su tim slovima označene u našim razmatranjima već neke druge veličine ili objekti. Imamo dakle:

$$\alpha = tg\, A, \quad \gamma = tg\, C, \quad \sigma = tg\, S, \quad \sigma' = tg\, S' \tag{77}$$

i odatle:

$$\frac{\gamma - \sigma}{\sigma - \alpha} = \frac{\cos A \sin (C - S)}{\cos C \sin (S - A)}, \quad \frac{\gamma - \sigma'}{\sigma' - \alpha} = \frac{\cos A \sin (C - S')}{\cos C \sin (S' - A)}. \tag{78}$$

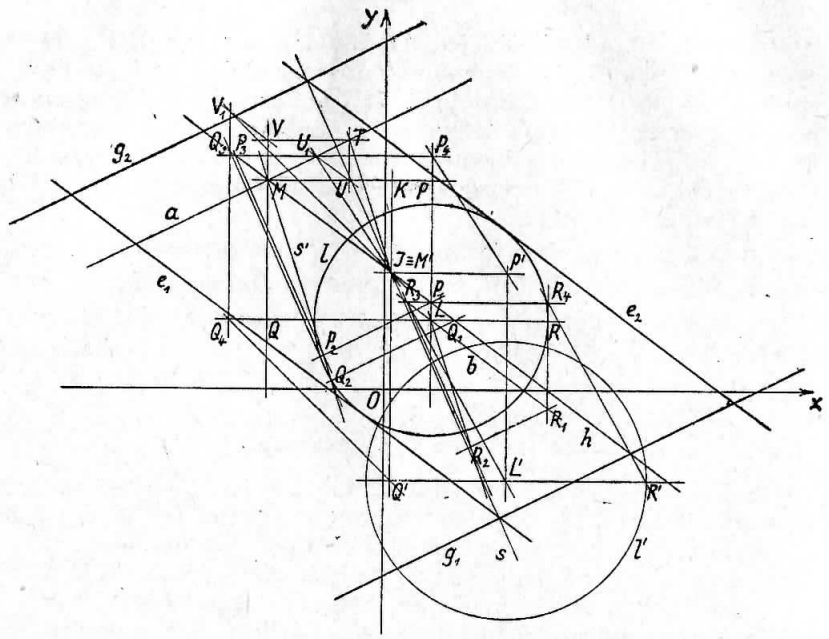
Kružnica l (L, r) i dvostruke točke M, J krivulje k neka su ucrtane u koordinatni sustav (sl. 7. a)[12]; točkama M, J povučemo paralele s koordinatnim osima i time dobivamo pravokutnik $MPJQ$, gdje M i P leže na paraleli s osi Ox. Za točke L (p, q), M (x_0, y_0), J (x_i, y_i) imamo iz slike po veličini i po predznaku:

$$\overline{MP} = p - x_0, \qquad \overline{MQ} = q - y_0, \tag{79}$$

a ako je K sjecište pravca MP i paralele s osi Oy točkom J, opet je po veličini i po predznaku:

$$\overline{MK} = x_i - x_0. \tag{80}$$

[12] Ta je slika crtana prema sl. 2. po numeričkim podacima iz sl. 1. s tim, da je $r' = 6$ za $\sigma = -\frac{99}{32}$.



Sl. 7.a

U formulama (51), koje sada kanimo grafički iskoristiti, dolaze upravo veličine (78), (79), (80) i prva veličina (77), a ako još uvedemo oznake

$$\overline{M'P'} = p' - x_0' = p' - x_i, \qquad \overline{M'Q'} = p' - y_0' = q' - y_i, \tag{81}$$

analogne oznakama u (79), mijenjaju formule (51) svoj analitički oblik u ovaj planimetrijski:

$$\begin{aligned} \overline{M'P'} &= \frac{\sin (S - A) \sin (C - S')}{\sin (C - S) \sin (S' - A)} \overline{MP} + \frac{\cos A \sin (C - S')}{\cos C \sin (S' - A)} \overline{MK}, \\ \overline{M'Q'} &= \frac{\sin (S - A) \sin (C - S')}{\sin (C - S) \sin (S' - A)} \overline{MQ} + \frac{\sin A \sin (C - S')}{\cos C \sin (S' - A)} \overline{MK}, \end{aligned} \tag{82}$$

koji se može grafički interpretirati ovako (sl. 7.a): iscrtamo pravac $MJ \equiv h$, točkom M povučemo pravac $a \parallel g_1$ i pravac s', a točkom J pravac s; zatim odredimo redom točke P_1, P_2, P_3, P_4 tako, da je $PP_1 \parallel Oy$ i P_1 na pravcu h, $P_1P_2 \parallel a$ i P_2 na s', $P_2P_3 \parallel s$ i P_3 na h, zatim $P_3P_4 \parallel Ox$ i P_4 na pravcu PP_1, a posve analogno i točke Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Projiciravši tada točku T, u kojoj pravac a siječe paralelu sa s' točkom J, normalno na pravce MP i MQ

u točke U, V, odredivši sjecišta U_1, V_1 pravaca P_3P_4, Q_3Q_4 s pravcima povučenim točkama U i V paralelno sa h, te povukavši točkama P_4, Q_4 paralele sa JU_1 odnosno JV_1, dobijemo na paralelama, povučenima točkom J s koordinatnim osima, točke P' i Q', koje konačno određuju s točkom $J \equiv M'$ središte L' tražene kružnice l': to je četvrti vrh pravokutnika, određenog trima točkama M', P', Q'.

Za polumjer r', dan formulom (67), postupamo ovako: neka je $\overline{LR}$ polumjer kružnice l, paralelan s osi Ox u pozitivnom smislu te osi tako, da je $\overline{LR} = r$, a tome pripadni polumjer kružnice l' neka je $\overline{L'R'} = r'$; tada formula (67) dobiva spomoću izraza (78) oblik:

$$\overline{L'R'} = \frac{\sin(S - A)\sin(C - S')}{\sin(C - S)\sin(S' - A)}\,\overline{LR}, \tag{83}$$

spomoću kojega se posredstvom točaka R_1, R_2, R_3, R_4 konstruira točka R', kako je to naznačeno u slici ($RR_1 \parallel Oy$ i R_1 na paraleli b sa h kroz L; $R_1R_2 \parallel a$ i R_2 na paraleli sa s' kroz L; $R_2R_3 \parallel s$ i R_3 na b; $R_3R_4 \parallel Ox$ i R_4 na RR_1; $R_4R' \parallel R_3L'$ i $L'R' \parallel Ox$).

Ta se konstrukcija kružnice l' znatno pojednostavi, ako se zadovoljimo napose kružnicom l', za koju je $r' = r$, dakle prema prethodnom članu $\sigma' = \sigma$ i kut $S' = S$. Tada naime jednadžbe (82) i (83) glase:

$$\overline{M'P'} = \overline{MP} + \frac{\cos A \sin(C - S)}{\cos C \sin(S - A)}\,\overline{MK},$$

$$\overline{M'Q'} = \overline{MQ} + \frac{\sin A \sin(C - S)}{\cos C \sin(S - A)}\,\overline{MK}, \quad \overline{L'R'} = \overline{LR}, \tag{84}$$

a pripadna konstrukcija je izvedena na sl. 7. b. Ovim se posebnim slučajem uostalom i možemo zadovoljiti, jer dobivši jednu kružnicu l', lako dobijemo spomoću homotetije iz točke J kao središta i svaku od ostalih.

11. Preostaje još da razmotrimo, kakve vrsti mogu biti dvostruke točke M, J, N_∞ naše krivulje k. Iz jednadžbe (25) te krivulje izlazi odmah skupna jednadžba para tangenata u dvostrukoj točki M (x_0, y_0):

$$G(x - x_0)^2 + 2H(x - x_0)(y - y_0) + K(y - y_0)^2 = 0, \tag{85}$$

a vrst te dvostruke točke upravlja se po predznaku diskriminante te kvadratne jednadžbe: *u točki M ima krivulja k uzao, šiljak ili izoliranu točku prema tome, da li je izraz*

$$\Delta = H^2 - GK \gtreqless 0. \tag{86}$$

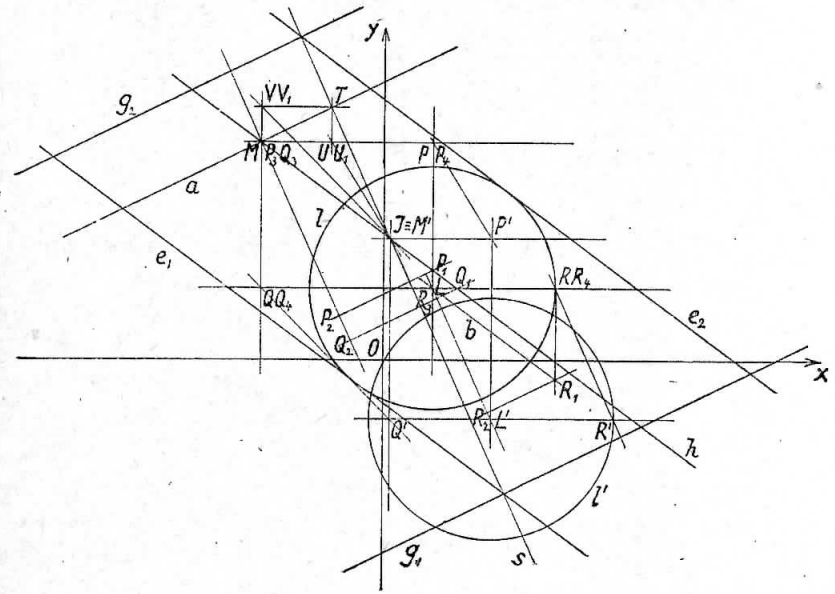
Uvažimo li pak vrijednosti (27) za G, H, K, nalazimo, da je

$$\Delta = -\frac{(\gamma - \alpha)^4}{[(\delta_2 - \delta_1) - (\beta_2 - \beta_1)]^2}(y_0 - \sigma x_0 - \tau)^2 (y_0 - \alpha x_0 - \beta_1)(y_0 - \alpha x_0 - \beta_2) \tag{87}$$

tako, da kriterij (86) sada glasi:

$$(y_0 - \alpha x_0 - \beta_1)(y_0 - \alpha x_0 - \beta_2) \lessgtr 0. \tag{88}$$

Geometrijsko značenje toga bit će odmah jasno, ako se sjetimo da »tragovi« g_1, g_2 ravnine Γ imaju jednadžbe (23). Znamo naime, da je veličina $y_0 - \alpha x_0 - \beta_1$ samo onda jednaka nuli,

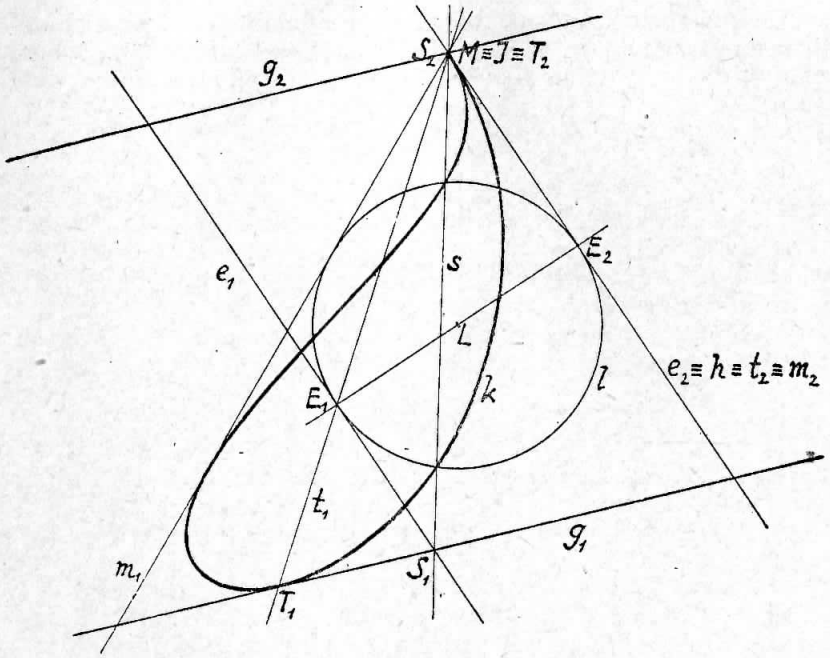


Sl. 7.b

kada točka (x_0, y_0) leži na pravcu $y - \alpha x - \beta_1 = 0$, dok će ona biti za sve točke (x_0, y_0), koje leže na jednoj strani toga pravca, pozitivna, a za sve točke (x_0, y_0) na drugoj strani, negativna. Kriterij (88) dakle kaže, da će krivulja k u svojoj dvostrukoj točki M (x_0, y_0) imati uzao, šiljak ili izoliranu točku prema tome, da li točka M leži u pruzi (g_1, g_2), na kojem od njezinih međašnih pravaca g_1, g_2 ili izvan te pruge. No to je jasno i geome-

trijski, budući da prema izvodima na kraju čl. 2. mora krivulja k ležati sva u pruzi (g_1, g_2), pa mogu izvan nje ležati samo izolirane točke krivulje, naime točke, koje su doduše realne i leže na krivulji, ali s realnim potezom krivulje nemaju realne sveze. Sve se to može uostalom vrlo lijepo objasniti i spomoću konstrukcije za pojedine točke krivulje k opisane u čl. 3.

Mogla bi se još uzeti u obzir činjenica, da je $\Delta = 0$ i onda, ako je u (87) veličina $y_0 - \sigma x_0 - \tau$ jednaka nuli, što bi s obzi-



Sl. 8.a

rom na jednadžbu (28) značilo, da točka M leži na pravcu s, a kako svi pravci s prolaze dvostrukom točkom J, bilo bi $s \equiv MJ \equiv h$. No u tom je slučaju $\sigma = \gamma$, pa prema izvođenjima u čl. 7. mora biti ravnina $\mathbf{E} \equiv \Phi$, a poradi toga se kružnica l steže na točku M, te uopće ne može služiti za izvođenje konoida **K**, dakle ni krivulje k. Ostaje prema tome samo kriterij (88). U sl. 2., 8.a, 8.b predočena su spomenuta tri slučaja redom, kako su navedena u tom kriteriju.

Posve ista razmatranja možemo sada učiniti za dvostruku točku $J \equiv M'$ s tim, da pođemo od jednadžbe (41) mjesto od jed-

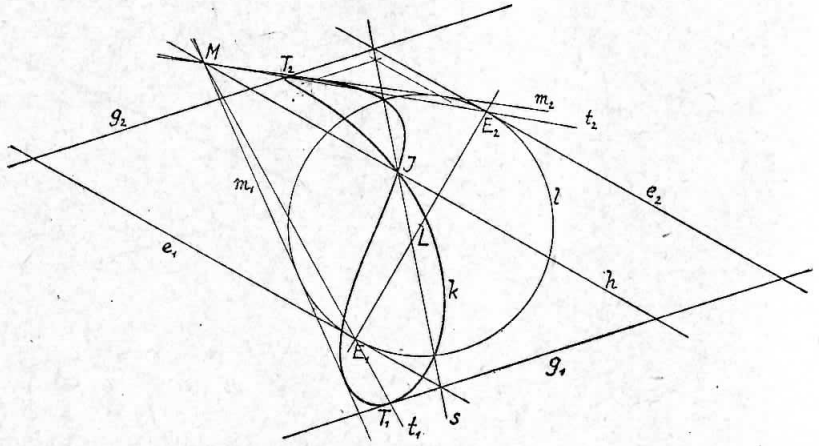
nadžbe (25). Tako imamo najprije, s obzirom na (38), jednadžbu para tangenata krivulje k u točki J:

$$G'(x - x_i)^2 + 2H'(x - x_i)(y - y_i) + K'(y - y_i)^2 = 0, \quad (89)$$

gdje su koeficijenti G', H', K' dani formulama (43). A kriterij, da točka J bude uzao, šiljak ili izolirana točka, glasi analogno prema (88):

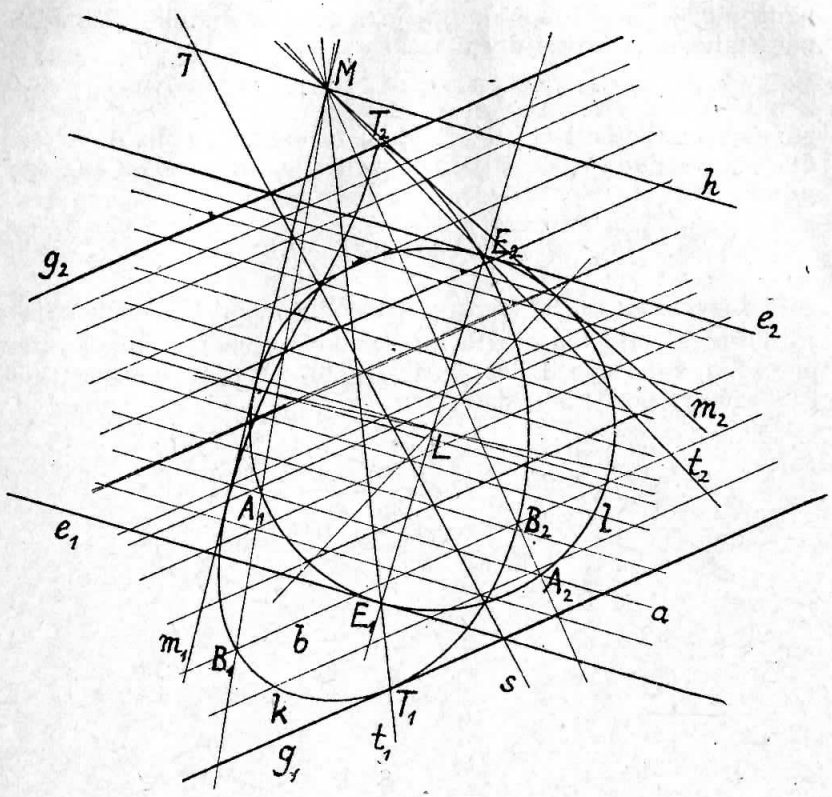
$$(y_i - \alpha x_i - \beta_1)(y_i - \alpha x_i - \beta_2) \gtrless 0, \quad (90)$$

gdje su veličine x_i, y_i dane u (19) odnosno (31). Geometrijska je interpretacija toga kriterija dakako posve ista kao i interpretacija, koju smo dali za kriterij (88), jer lijeve strane u (88) i (90) imaju posve istu strukturu.



Sl. 8.b

Ali kako je dvostruka točka J određena zadanim elementima konoida **K** i presječne ravnine Γ, a među tima se nalazi i točka M kao xy-probodište zadane dvostruke pravčaste ravnalice m konoida, zaključujemo, da će vrst dvostruke točke J zavisiti od položaja dvostruke točke M. I doista, nije teško u tom pogledu doći do toga rezultata: *dvostruka točka J je uzao, šiljak ili izolirana točka prema tome, da li dvostruka točka M leži u pruzi (e_1, e_2), na kojem od njezinih međašnih pravaca e_1, e_2 ili izvan te pruge.* Tada naime xy-projekcija h dvostruke izvodnice h^* konoida **K** siječe pravac s u točki S, koja se nalazi na dužini



Sl. 8.c

$\overline{S_1S_2}$, u jednoj njezinoj krajnoj točki S_1, S_2 ili izvan te dužine, te se stoga točka J mora nalaziti u pruzi (g_1, g_2), na njezinoj međi ili izvan te pruge. A to je upravo sadržaj kriterija (90), koji je prema izloženome, a s obzirom na jednadžbe (22), ekvivalentan s kriterijem

$$(y_0 - \gamma x_0 - \delta_1)(y_0 - \gamma x_0 - \delta_2) \lessgtr 0 . \tag{91}$$

Ova se ekvivalencija mora dakako dati dokazati i čisto analitički. U sl. 8.b (ili 2.), 8.a, 8.c predočena su redom tri slučaja (90).

Prema svemu, što je naprijed rečeno o vrstima dvostrukih točaka M i J, jasno je, da svaka vrst točke M može doći zajedno sa svakom vrsti točke J tako, da u svemu ima devet kombinacija tih vrsti. Ako slučaj uzla, šiljka i izolirane

točke u M označimo — prema kriteriju (86) — sa M^+, M^e, M^-, i analogno za točku J sa J^+, J^0, J^-, tada imamo u sl. 2. kombinaciju (M^+, J^+), u sl. 8.a (M^0, J^0), u sl. 8.b (M^-, J^+), a u sl. 8.c (M^-, J^-). U slučaju dvaju šiljaka padaju točke M, J dakako zajedno, i to u jednu od točaka S_1, S_2; geometrijski razlog toga je nakon navedenih objašnjenja očevidan. Kako planimetrijska konstrukcija krivulje k ne zadaje nikakvih poteškoća (opisana je na početku čl. 3., a vidljiva je jasno na sl. 8.c i donekle na sl. 2.), ne će biti teško niz naših slika upotpuniti tako, da bude grafički predočeno svih devet prije spomenutih slučajeva.

Kao posljedica dokazane ravnopravnosti dvostrukih točaka M, J izlazi iz zavisnosti točke J od točke M, da se i obrnuto, iz položaja dvostruke točke J dade izvesti kriterij za vrst dvostruke točke M. Treba samo točke M, J shvatiti kao točke J', M' i poslužiti se prugom (e_1', e_2') mjesto prugom (e_1, e_2).

Treća, neizmjerno daleka dvostruka točka N_∞ krivulje k traži za određenje svoje vrste nešto drukčiji postupak. Tangente krivulje k (dakako dvije) u toj točki N_∞ asimptote su krivulje, pa se vrst te dvostruke točke upravlja po realitetnim odnosima tih asimptota. Geometrijski je to pitanje već riješeno u čl. 3., gdje je realitet asimptota zavisio o realitetu točaka A_1' A_2'' (sl. 9. a); a s obzirom na značenje tih točaka možemo odmah izreći stavak: *asimptote krivulje k realne su i različite, realne i sjedinjene ili (konjugirano) imaginarne prema tome, da li pravac b_m, povučen dvostrukom točkom M paralelno sa g_1, siječe, dira ili ne siječe kružnicu l.*

Analitički se mogu asimptote krivulje k odrediti na dva načina: ili tako, da se iz jednadžbe (25) krivulje k odrede jednadžbe asimptota spomoću koje od metoda iz teorije ravnih krivulja ili jednostavnije tako, da se upravo spomenuta geometrijska razmatranja i operacije iz čl. 3. provedu analitički. Prvi način daje jednadžbe asimptota u obliku:

$$y = \alpha x + \mu , \tag{92}$$

gdje je

$$\mu = \frac{(P + Q\alpha + R\alpha^2) \pm \sqrt{(P + Q\alpha + R\alpha^2)^2 - (1 + \alpha^2)(G + 2H\alpha + K\alpha^2)}}{(1 + \alpha^2)(\gamma - \sigma)} \tag{93}$$

za veličine P, Q, R, G, H, K iz (26), (27) i (36), te σ iz (29). A drugi način vodi do jednadžbe

$$y = \alpha x + \frac{(\gamma - \alpha)\tau - (\sigma - \alpha)[(y_0 - \gamma x_0) - (\gamma - \alpha) W]}{\gamma - \sigma} , \tag{94}$$

gdje je veličina τ dana u (29), a W formulom

$$W = \frac{(p-x_0)+\alpha(q-y_0) \pm \sqrt{(1+\alpha^2)r^2-[(q-y_0)-\alpha(p-x_0)]^2}}{(1+\alpha^2)(\gamma-\sigma)} = x_{1,2}-x_0\,; \quad (95)$$

$x_{1,2}$ tu znači apscise spomenutih točaka A_1', A_2'', od kojih zavisi realitet asimptota. Jednadžbe (92) i (94) su ekvivalentne, te njihov definitivni zajednički oblik glasi:

$$y = \alpha x + (\gamma-\alpha)\left[(x_i-x_0) + \frac{\sigma-\alpha}{(1+\alpha^2)(\gamma-\sigma)} W\right]. \quad (96)$$

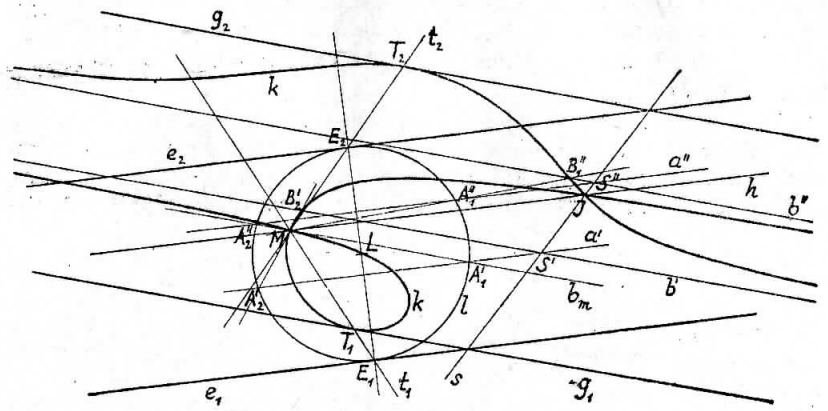
Analitički kriterij za realitet asimptota čita se sada naprosto iz izraza (95) za W: *asimptote su realne i različite, realne i sjedinjene ili (konjugirano) imaginarne prema tome, da li je*

$$(1+\alpha^2)r^2-[(q-y_0)-\alpha(p-x_0)]^2 \gtreqless 0\,. \quad (97)$$

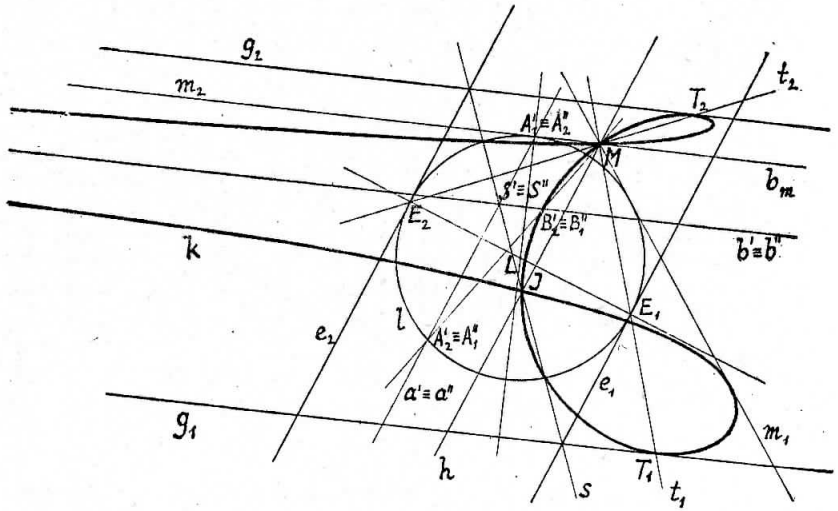
A to geometrijski znači, da udaljenost središta L kružnice l od pravca, povučenoga dvostrukom točkom M paralelno sa g_1, dakle spomenutoga pravca b_m, mora biti manja od polumjera r kružnice l, jednaka tom polumjeru ili veća od njega. No to je, drugim riječima rečeno, ono isto, što smo već naprijed kazali. A može se za formulaciju toga kriterija upotrebiti i pruga, omeđena tangentama kružnice l paralelnima sa g_1.

Po analogiji triju vrsti »konačne« dvostruke točke ima se neizmjerno daleka dvostruka točka N_∞ u slučaju realnih i različitih asimptota smatrati uzlom, u slučaju realnih i sjedinjenih asimptota šiljkom, a za imaginarne asimptote izoliranom točkom. U prva dva slučaja su g_1, g_2 tangente, koje se daju iz te dvostruke točke N_∞ povući na krivulju k, analogne tangentama m_1, m_2 iz dvostruke točke M.

Sva tri slučaja realiteta asimptota krivulje k imamo predočena u sl. 9.a, 9.b i 2.; za sl. 9.a treba napomenuti, da točka M ne mora ležati u unutrašnjosti kružnice l, da asimptote budu realne, a za sl. 2., da mjesto nje može u sadašnju svrhu služiti i svaka od slika 8.a, 8.b, 8.c. U svim se slučajevima, gdje su asimptote imaginarne, jasno vidi, kako krivulja k teži prema neizmjerno dalekoj izoliranoj dvostrukoj točki N_∞; tako u sl. 2. teže k toj točki obadva luka omeđena dvostrukim točkama M, J. To je teženje dakako mnogo jače, ako je izolirana točka u konačnosti (vidi sl. 8.b i 8.c).



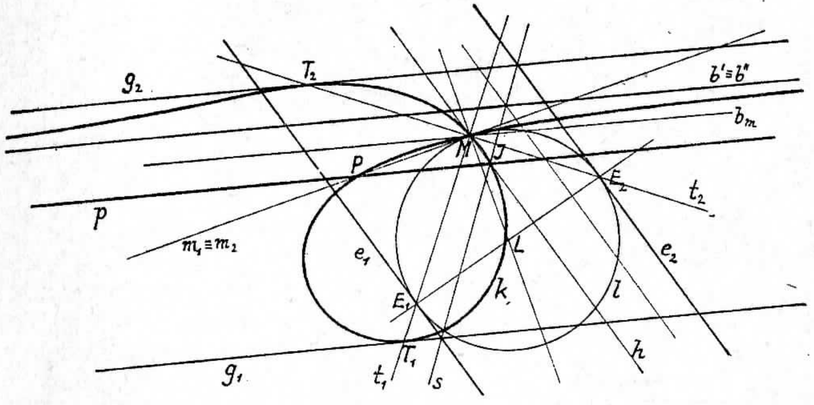
Sl. 9.a



Sl. 9.b

Svaka od tri vrsti dvostruke točke N_∞ može doći u kombinaciju sa svakom od devet kombinacija vrsti konačnih dvostrukih točaka M, J tako, da u svemu imamo 27 kombinacija vrsti dvostrukih točaka M, J, N_∞. Tako sl. 9.a prikazuje kombinaciju $(M^+, J^+, N_\infty^\pm)$, sl. 9.b slučaj (M^+, J^+, N_∞^0), dok je na pr. sl. 2. tipa (M^+, J^+, N_∞^-).

Posve nezavisno o toj shemi predočena je napokon u sl. 10. krivulja k za slučaj, kada dvostruka točka M leži na samoj kružnici l, što prostorno znači, da je dvostruka pravčasta ravnalica m postala izvodnicom valjka (l, v) i prema tome siječe elipsu-



Sl. 10.

ravnalicu e. Po općenoj teoriji tračnih ploha, konoid **K** je tada 3. reda, a zbog toga krivulja $\mathbf{K} \times \Gamma$ treba biti 3. reda. No u planimetrijskom izvođenju krivulja je k još 4. reda, samo što se raspala u krivulju 3. reda i pravac p; krivulja ima sada četiri dvostruke točke, naime točku M i svoja tri sjecišta s pravcem p (od kojih je jedno točka J, drugo točka N_∞ a treće, P, leži na tangenti $m_1 \equiv m_2$ od l u točki M), što je u skladu s općenom teorijom ravnih algebarskih krivulja, po kojoj krivulja, koja ima više dvostrukih točaka, nego što je to po visini njezina reda ide, nužno degenerira.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 11. III. 1948.)

Dr. Ing. RAJKO KUŠEVIĆ

RJEŠAVANJE TROČLANIH JEDNADŽBI ELASTIČNOSTI POSTUPKOM NEODREĐENIH KOEFICIJENATA

Proračunavajući najvažnije u višem stupnju hiperstatičke sisteme nosača, nailazimo na grupe tročlanih linearnih jednadžbi oblika

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} X_1\,\delta_{11} + X_2\,\delta_{12} & = N_1, \\ X_1\,\delta_{21} + X_2\,\delta_{22} + X_3\,\delta_{23} & = N_2, \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} & \\ X_{k-1}\,\delta_{k-1,k} + X_k\,\delta_{kk} + X_{k+1}\,\delta_{k+1,k} & = N_k, \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} & \\ X_{n-2}\,\delta_{n-1,n-2} + X_{n-1}\,\delta_{n-1,n-1} + X_n\,\delta_{n-1,n} & = N_{n-1}, \\ X_{n-1}\,\delta_{n,n-1} + X_n\,\delta_{nn} & = N_n, \end{array}\right.$$

s matricom simetričnom prema glavnoj dijagonali ($\delta_{ik} = \delta_{ki}$). Iako već imamo opće obrasce za rješavanje takvih jednadžbi, izvedene po skraćenom G a u s s o v u algoritmu ili po supstitucionom postupku M ü l l e r - B r e s l a u a, još zaslužuje pažnju taj važni algebarski zadatak građevinske statike. Pokazat ćemo ovdje, da se i upotrebom postupka neodređenih koeficijenata dolazi do podesnih općih obrazaca za proračunavanje nepoznanica iz tročlanih jednadžbi elastičnosti. Oni su zanimljivi po svom sastavu kao i s obzirom na praktičnu izvedbu proračuna, i to bilo da se radi o istraživanju nosača za neko određeno stanje opterećenja, bilo da se traži opće rješenje grupe jednadžbi (1) u obliku

$$(2)\quad X_k = \sum_{i=1}^{i=n} \beta_{ki}\,N_i,$$

t. j. da se traži konjugirana matrica.

Pomnožit ćemo redom uvjetne jednadžbe (1) sa zasada neodređenim koeficijentima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, zbrojit ćemo zatim sve jednadžbe i članove srediti po nepoznanicama; time dobivamo jednadžbu

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&X_1(\lambda_1\delta_{11}+\lambda_2\delta_{21})\\
&+X_2(\lambda_1\delta_{12}+\lambda_2\delta_{22}+\lambda_3\delta_{32})\\
&+----------\\
&+X_k(\lambda_{k-1}\delta_{k-1,k}+\lambda_k\delta_{kk}+\lambda_{k+1}\delta_{k+1,k})\\
&+----------\\
&+X_{n-1}(\lambda_{n-2}\delta_{n-2,n-1}+\lambda_{n-1}\delta_{n-1,n-1}+\lambda_n\delta_{n,n-1})\\
&+X_n(\lambda_{n-1}\delta_{n-1,n}+\lambda_n\delta_{nn})\\
&=\sum_1^n \lambda_i N_i .
\end{aligned}\right.
$$

Za n neodređenih koeficijenata λ_i postavit ćemo n uvjeta:

1) Faktori u zagradama svih nepoznanica u jednadžbi (3) osim jedne, po volji odabrane X_k, jednaki su nuli; to daje $n-1$ jednadžbi za određivanje koeficijenata λ_i, koji općenito uzevši zavise od broja k, te ćemo ih stoga označiti sa $\lambda_i^{(k)}$:

$$
(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda_{i-1}^{(k)}\delta_{i-1,i}+\lambda_i^{(k)}\delta_{ii}+\lambda_{i+1}^{(k)}\delta_{i+1,i}=0,\\
&(i=1,2,\ldots k-1,k+1,\ldots n-1,n;\ \lambda_0^{(k)}=0,\ \lambda_{n+1}^{(k)}=0)
\end{aligned}\right.
$$

i jednu jednadžbu za određivanje nepoznanice X_k:

$$
X_k(\lambda_{k-1}^{(k)}\delta_{k-1,k}+\lambda_k^{(k)}\delta_{kk}+\lambda_{k+1}^{(k)}\delta_{k+1,k}^{(k)})=\sum_1^n \lambda_i^{(k)} N_i
$$

s rješenjem:

$$
(5)\qquad X_k=\frac{\sum_1^n \lambda_i^{(k)} N_i}{\lambda_{k-1}^{(k)}\delta_{k-1,k}+\lambda_k^{(k)}\delta_{kk}+\lambda_{k+1}^{(k)}\delta_{k+1,k}}.
$$

2) Jedan od koeficijenata $\lambda_i^{(k)}$, i to prvi, $\lambda_1^{(k)}$, uzet ćemo jednak jedinici. Iz prve do $(k-1)$-ve od jednadžbi (4) možemo počevši sa $\lambda_1^{(k)}=1$ rekurzijom odrediti vrijednosti koeficijenata $\lambda_2^{(k)}$ do $\lambda_k^{(k)}$. Budući da one ne zavise od rednog broja k, označit ćemo ih općenito sa λ'_i, tako da rekursioni obrazac za njihovo izračunavanje, izveden iz $(i-1)$-ve od jednadžbi (4), glasi:

$$
(6)\qquad \lambda'_i=\frac{\lambda'_{i-2}\delta_{i+2,i-1}+\lambda'_{i-1}\delta_{i-1,i-1}}{-\delta_{i,i-1}},\qquad (i\leq k).
$$

Ostale koeficijente $\lambda_{k+1}^{(k)}$ do $\lambda_n^{(k)}$ proračunat ćemo iz $n-k$ preostalih jednadžbi (4), koje su sustav tročlanih jednadžbi tipa (1), i to tako, da ćemo početi s proračunavanjem tih koeficijenata odozdo prema gore, polazeći umjesto od nepoznate vrijednosti $\lambda_n^{(k)}$ od po volji odabrane vrijednosti $\lambda''_n=1$; na taj ćemo način dobiti iz n-te do $(k+1)$-ve jednadžbe (4) po rekursionom obrascu

$$
(7)\qquad \lambda''_i=\frac{\lambda''_{i+2}\delta_{i+2,i+1}+\lambda''_{i+1}\delta_{i+1,i+1}}{-\delta_{i,i+1}},\qquad (i\geq k),
$$

koeficijente λ''_{n-1} do λ''_k. Vrijednost kojega god od ovih koeficijenata λ''_{n-s} očigledno će biti povezana s pravom vrijednosti $\lambda_{n-s}^{(k)}$ odnosom

$$
\lambda''_{n-s}=\frac{1}{\lambda_n^{(k)}}\lambda_{n-s}^{(k)},
$$

pa je prema tome

$$
(8)\qquad \lambda_{n-s}^{(k)}=\lambda_n^{(k)}\cdot\lambda''_{n-s}.
$$

Napose je

$$
\lambda_k^{(k)}=\lambda_n^{(k)}\cdot\lambda''_k,
$$

a budući da je za vrijednost $\lambda_k^{(k)}$ već nađeno proračunavanjem koeficijenata λ'_i

$$
\lambda_k^{(k)}=\lambda'_k,
$$

izlazi odatle

$$
\lambda_n^{(k)}=\frac{\lambda'_k}{\lambda''_k}
$$

i općenito iz (8)

$$
(9)\qquad \lambda_{n-s}^{(k)}=\frac{\lambda'_k}{\lambda''_k}\lambda''_{n-s}.
$$

Prema tome možemo rješenje (5) za nepoznanicu X_k napisati u obliku:

$$
(10)\qquad X_k=\frac{\sum_1^k \lambda'_i N_i+\frac{\lambda'_k}{\lambda''_k}\sum_{k+1}^n \lambda''_i N_i}{\lambda'_{k-1}\delta_{k-1,k}+\lambda'_k\delta_{kk}+\frac{\lambda'_k}{\lambda''_k}\lambda''_{k+1}\delta_{k+1,k}}.
$$

ili i u obliku:

$$X_k = \frac{\frac{\lambda''_k}{\lambda'_k} \sum_1^k \lambda'_i N_i + \sum_{k+1}^n \lambda''_i N_i}{\frac{\lambda''_k}{\lambda'_k} \lambda'_{k-1} \delta_{k-1,k} + \lambda''_k \delta_{kk} + \lambda''_{k+1} \delta_{k+1,k}} \tag{10a}$$

Uvedu li se oznake

$$\begin{cases} L'_k = \lambda'_{k-1} \delta_{k-1,k} + \lambda'_k \delta_{kk} + \dfrac{\lambda'_k}{\lambda''_k} \lambda''_{k+1} \delta_{k+1,k}, \\ L''_k = \dfrac{\lambda''_k}{\lambda'_k} \lambda'_{k-1} \delta_{k-1,k} + \lambda''_k \delta_{kk} + \lambda''_{k+1} \delta_{k+1,k}, \end{cases} \tag{11}$$

dobivamo iz (10) i (10a) rješenje X_k u obliku:

$$X_k = \frac{\sum_1^k \lambda'_i N_i}{L'_k} + \frac{\sum_{k+1}^n \lambda''_i N_i}{L''_k}. \tag{12}$$

Isporedimo li ovaj obrazac s općim rješenjem (2), dobivamo neposredno izraze za vrijednosti članova konjugirane matrice:

$$\begin{cases} \text{za } i \leq k: & \beta_{ki} = \dfrac{\lambda'_i}{L'_k}, \\ \text{za } i \geq k: & \beta_{ki} = \dfrac{\lambda''_i}{L''_k}. \end{cases} \tag{13}$$

Zamjenom indeksa i i k dobivamo odatle:

$$\begin{cases} \text{za } i \geq k: & \beta_{ik} = \dfrac{\lambda'_k}{L'_i}, \\ \text{za } i \leq k: & \beta_{ik} = \dfrac{\lambda''_k}{L''_i}. \end{cases} \tag{14}$$

Kako je zbog simetrije matrice danih jednadžbi (1) prema glavnoj dijagonali i konjugirana matrica simetrična prema glavnoj dijagonali, t. j. $\beta_{ki} = \beta_{ik}$, izlazi iz (13) i (14):

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda'_i}{L'_k} = \dfrac{\lambda''_k}{L''_i}, \\ \dfrac{\lambda''_i}{L''_k} = \dfrac{\lambda'_i}{L'_i} \end{cases}$$

ili

$$\begin{cases} \dfrac{1}{L'_k} = \dfrac{\lambda''_k}{\lambda'_i} \cdot \dfrac{1}{L''_i}, \\ \dfrac{1}{L''_k} = \dfrac{\lambda'_i}{\lambda''_i} \cdot \dfrac{1}{L'_i}. \end{cases} \tag{15}$$

Iz prve od jednadžbi (15) dobivamo za $i = 1$, uzimajući u račun, da je $\lambda'_1 = 1$,

$$\frac{1}{L'_k} = \lambda''_k \cdot \frac{1}{L''_1}, \tag{16}$$

a iz druge za $i = n$ i $\lambda''_n = 1$

$$\frac{1}{L''_k} = \lambda'_k \cdot \frac{1}{L'_n}. \tag{16a}$$

Veličine

$$\begin{cases} L''_1 = \lambda''_1 \delta_{11} + \lambda''_2 \delta_{21}, \\ L'_n = \lambda'_{n-1} \delta_{n-1,n} + \lambda'_n \delta_{nn} \end{cases} \tag{17}$$

dobivaju se kod proračunavanja koeficijenata λ''_i ili λ'_i, po obrascu (7), ili (6); to su brojnici u izrazima za λ''_1 ili λ'_n. Prema tome otpada potreba, da se napose proračunavaju sve vrijednosti L'_k i L''_k po obrascima (11); opće rješenje (12) dobiva oblik

$$X_k = \frac{\lambda''_k \sum_1^k \lambda'_i N_i}{L''_1} + \frac{\lambda'_k \sum_{k+1}^n \lambda''_i N_i}{L'_n}. \tag{18}$$

Iz obrasca (16) izlazi dalje za $k = n$ i $\lambda''_n = 1$ (ili iz obrasca (16a) za $k = 1$ i $\lambda'_1 = 1$):

$$\frac{1}{L'_n} = \frac{1}{L''_1},$$

dakle

(19)[1] $$L'_n = L''_1 = L$$

i prema tome dobivamo iz (18) konačan obrazac za računanje koje god nepoznanice X_k, za neko određeno stanje opterećenja:

(20) $$X_k = \frac{1}{L}\left(\lambda''_k \sum_{1}^{k} \lambda'_i N_i + \lambda'_k \sum_{k+1}^{n} \lambda''_i N_i\right),$$

koji je, kako će se vidjeti na brojčanom primjeru, vrlo zgodan za tabelarno računanje. On se može očigledno pisati i u obliku

(20a) $$X_k = \frac{1}{L}\left(\lambda''_k \sum_{1}^{k-1} \lambda'_i N_i + \lambda'_k \sum_{k}^{n} \lambda''_i N_i\right),$$

što može poslužiti za kontrolu u samom računanju.

Za članove konjugirane matrice dobivamo neposredno iz prethodnog obrasca (20) u vezi sa (2) [ili također iz obrasca (13) i (16)]:

(21)
$$\begin{cases} \text{za } i \leq k: & \beta_{ki} = \dfrac{\lambda''_k \lambda'_i}{L}, \\ \text{za } i \geq k: & \beta_{ki} = \dfrac{\lambda'_k \lambda''_i}{L}. \end{cases}$$

[1] Taj rezultat ima dakako svoje dublje značenje. Jednadžbe (4) za određivanje koeficijenata λ'_i imaju za $k = n$ zbog simetrije matrice jednadžbi (1) isti oblik kao i analogne jednadžbe za proračunavanje koeficijenata β_{ni} po obrascu (2) kao nepoznanica, kad su svi apsolutni članovi osim člana $N_n = 1$ jednaki nuli. Isto tako imaju jednadžbe (4) za određivanje koeficijenata λ''_i za $k = 1$ isti oblik kao analogne jednadžbe za proračunavanje koeficijenata β_{1i} kao nepoznanica, kad su jednaki nuli svi apsolutni članovi osim $N_1 = 1$. Prema tome će koeficijenati λ'_i ili λ''_i, biti proporcionalni koeficijentima β_{ni} ili β_{1i}. Budući da je $\beta_{n1} = \beta_{1n}$, a mi smo uzeli $\lambda'_i = \lambda''_n$ $(= 1)$, mora postojati odnos (19).

Za praktično izvođenje računa konjugirane matrice potreban je — zbog simetrije te matrice prema glavnoj dijagonali — samo jedan od tih obrazaca, koji su također izvanredno zgodni za tabelarno računanje. Ako je k broj stupca, a i broj reda matrice, dobiva se po prvom od obrazaca (21) gornji dio matrice s glavnom dijagonalom, a po drugom donji.

Odnos (19) poslužit će nam s jedne strane kao vrlo korisna kontrola lančanih računa kod određivanja vrijednosti koeficijenata λ'_i i λ''_i, a s druge strane za dalje pojednostavnjenje brojčanih računa. Počnemo li naime lančani račun koeficijenata λ''_i mjesto od vrijednosti $\lambda''_n = 1$ od vrijednosti

(22) $$\overline{\lambda''_n} = 1 \cdot \frac{10^r}{L},$$

uzimajući pri tome za r zgodan cio broj — najbolje za jedinicu manji od broja cijelih mjesta u L — dobit ćemo lančanim računom koeficijente

(23) $$\overline{\lambda''_i} = \frac{10^r}{L}\,\lambda''_i,$$

s kontrolom na kraju računa

(24) $$\overline{L''_1} = \overline{\lambda''_1}\,\delta_{11} + \overline{\lambda''_2}\,\delta_{21} = 10^r$$

Prema tome će biti

$$\frac{\lambda''_i}{L} = 10^{-r}\,\overline{\lambda''_i},$$

pa obrazac (20) za računanje nepoznanica dobiva jednostavan oblik:

(25) $$X_k = 10^{-r}\left(\overline{\lambda''_k} \sum_{1}^{k} \lambda'_i N_i + \lambda'_k \sum_{k+1}^{n} \overline{\lambda''_i} N_i\right).$$

Obrasci (21) za računanje konjugirane matrice glasit će ovdje

(26)
$$\begin{cases} \text{za } i \leq k: & \beta_{ki} = 10^{-r}\,\overline{\lambda''_k}\,\lambda'_i, \\ \text{za } i \geq k: & \beta_{ki} = 10^{-r}\,\lambda'_k\,\overline{\lambda''_i}. \end{cases}$$

U naročitom slučaju, kad je matrica danih jednadžbi simetrična i prema sporednoj dijagonali, bit će općenito $\lambda''_{n-s} = \lambda'_{1+s}$, pa je prema tome potrebno izvršiti samo jedan lančani račun, na primjer račun koeficijenata λ'_i. Kolona koeficijenata λ''_i dobiva se inversijom kolone koeficijenata λ'_i. Ovdje stoga otpada kontrola lančanog računa po obrascu (19); ona u ovom slučaju nije ni toliko potrebna.

Praktična primjena i upotrebljivost postupka

Najprije ćemo riješiti pitanje, da li je racionalnije računati nepoznanice po obrascu (2), t. j. upotrebom konjugirane matrice, ili neposredno po obrascu (20) ili (25).

Uzmemo li, da su svi apsolutni članovi različiti od nule, zahtijeva računanje nepoznanica po obrascu (25) za neko određeno opterećenje — ako je već prije toga izvršeno određivanje koeficijenata λ'_i i λ''_i — svega 4 $(n-1)$ multiplikacija i 3 $(n-1)$ algebarskih adicija sa po 2 sumanda, t. j. svega 7 $(n-1)$ osnovnih računskih operacija.

Radi li se naprotiv po obrascu (2) spomoću konjugirane matrice, treba, ne obaziruć se opet na računanje koeficijenata λ'_i i λ''_i, za iznalaženje konjugirane matrice, koja će poslužiti za bilo koji broj pojedinih slučajeva opterećenja, izvršiti $\frac{n}{2}(n-1)$ multiplikacija, a zatim za svaki određeni slučaj opterećenja n^2 multiplikacija i n algebarskih adicija sa po n sumanada, t. j. zajedno $n(n+1)$ osnovnih računskih operacija. Po tome je na primjer potrebno kod

jednadžbi sa	po obr. (25)	po obr. (2) bez izračunavanja konjug. matrice	po obr. (2) za samo izračunavanje konjug. matrice
4 nepoznanice	21	20	6 osnov. rač. oper.
6 nepoznanica	35	42	15 » » »
8 »	49	72	28 » » »
12 »	77	156	66 » » »

Općenito je dakle daleko povoljniji rad po obrascu (25), po kome se mogu sve prekobrojne veličine proračunati najkraćim putem nezavisno jedna od druge, kao i pri

upotrebi konjugirane matrice. Za samo iskorišćenje gotove konjugirane matrice pri proračunu po obrascu (2), dakle bez obzira na rad za računanje te matrice, potrebno je više (a donekle i tegobnijih) osnovnih računskih operacija nego za rad po obrascu (25). Isto vrijedi i onda, kad su samo neki od apsolutnih članova različni od nule. Kod dvostruko simetrične matrice danih jednadžbi razmjer je nešto manje nepovoljan za računanje spomoću konjugirane matrice.

Izračunavanje nepoznatih veličina za određeno stanje opterećenja može se uostalom i po ovom postupku, kao i kod primjene skraćenog algoritma po Gaussu ili supstitucije po Müller-Breslauu, izvršiti i tako, da se izvede samo jedan lančani račun neodređenih koeficijenata, na primjer λ'_i, proračuna posljednja nepoznanica po obrascu (12):

$$X_n = \frac{1}{L} \sum_{1}^{n} \lambda'_i N_i, \tag{27}$$

i s njome izračunaju ostale nepoznanice rekurzijom odozdo prema gore iz n-te do druge od danih jednadžbi elastičnosti. Cio računski rad tako se doduše smanjuje skoro na polovicu, ali otpada mogućnost kontrole računa u vrijeme samog rada; kontrolu daje tek na kraju rada prva jednadžba, koja se ne iskorišćuje za račun nepoznanica.

Poređenjem izvedbe računanja po naprijed izloženom postupku s radom po navedenim postupcima Gaussa i Müller-Breslaua dolazimo do ovih zaključaka:

Za samo računanje koeficijenata λ'_i i λ''_i treba izvršiti nešto više osnovnih računskih operacija nego za poznato određivanje eliminacionih koeficijenata μ_i i μ'_i ($2n$ multiplikacija više). Taj je nedostatak već donekle ublažen činjenicom, da se uvijek izvode po dvije multiplikacije s jednim multiplikatorom, a već u slučaju sistema od pet jednadžbi posve je kompensiran uštedom u broju računskih operacija kod primjene obrasca (25) za određivanje nepoznanica umjesto obrasca (2) s upotrebom konjugirane matrice. S porastom broja jednadžbi odnos postaje sve povoljniji. Težim se čini prigovor obrascima za računanje koeficijenata λ, a time i cijelom postupku, da se ti koeficijenti dobivaju kao nepravi razlomci, jer u obrascima za λ'_i i λ''_i dolazi u nazivniku jedan od sporednih koeficijenata δ_{ik}. Zbog toga rastu sukcesivne vrijednosti koeficijenata λ, pa će biti potrebno,

da se oni računaju s većim brojem znamenaka. Kako se međutim lančani računi u suvremenoj građevinskoj statici (pa tako i računi eliminacionih koeficijenata μ_i i μ_i'' kod naprijed spominjanih poznatih postupaka), da se ukloni umnožavanje pogrešaka, općenito vrše računskim strojem s većim brojem mjesta, gubi spomenuti prigovor svoje značenje. Ako razmjer između glavnih koeficijenata δ_{ii} i sporednih koeficijenata δ_{ik} u danoj matrici uvjetnih jednadžbi nije suviše nepovoljan, a to je svakako velika većina slučajeva, moći će se računanje koeficijenata λ_i' i λ_i'' s obzirom na praktično potreban stupanj točnosti u rezultatima ipak vršiti i spomoću logaritmičkog računala, što će nam pokazati i brojčani primjer na kraju rasprave.

Glavna prednost prikazanog postupka sastoji se u jednostavnosti dobivenih obrazaca za proračunavanje nepoznanica i u njihovoj naročitoj podesnosti za pregledno tabelarno određivanje. Koeficijenti λ_i' i λ_i'' nalaze se po obrascima, koji se mogu smjesta očitati iz matrice danih jednadžbi, kako će biti pokazano na praktičnom primjeru. Na kraju dvostrukoga lančanog računa automatski se dobiva kontrola računa. Svi koeficijenti β_{ki} u konjugiranoj matrici računaju se po j e d n o m vrlo jednostavnom obrascu n e z a v i s n o jedan od drugoga, po volji uzetim redom. Kod računanja po Gaussu ili Müller-Breslauu najprije se računaju po jednom obrascu koeficijenti u glavnim dijagonalama, a iz njih po drugom obrascu sporedni koeficijenti, sukcesivnim množenjem s eliminacionim koeficijentima μ_i ili μ'_i. Dovoljno je zapamtiti jedan od jednostavnih obrazaca (21), ili (26), ili samo shemu za tabelarno računanje matrice β_{ki}[2], da se smjesta prema definicionom obrascu (2) napiše opće rješenje (20), ili (25). Nepoznanice se po tim obrascima računaju, kako je već spomenuto, nezavisno jedna od druge, po volji odabranim redom, što je naročito zgodno, ako se radi o prethodnom računanju sustava nosača, gdje većinom nije potrebno odmah naći vrijednost svih nepoznanica.

Predloženi postupak ima dobrih strana i onda, kad se računanje sistema nosača za neko određeno opterećenje vrši spomoću samo jednog lančanog računa, određivanjem nepoznanice X_n po obrascu (27), a ostalih nepoznanica rekursijom iz danih jednadžbi. Apsolutni se članovi ne uvlače u lančani račun kao

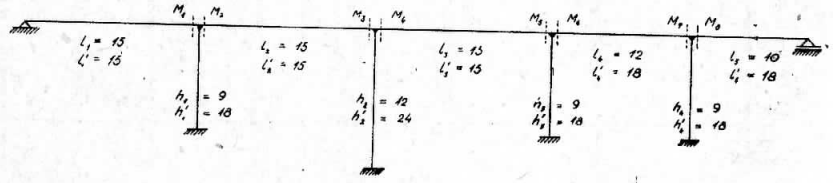
[2]) U vertikalan niz uz matricu napišu se koeficijenti λ'_1 do λ'_n, u horizontalan red nad matricom koeficijenti $\overline{\lambda}_1''$ do $\overline{\lambda}_n''$; multiplikacijom $\overline{\lambda}_k''$ λ_k dobiva se koeficijent β_{ki} na sjecištu k-toga stupca i i-toga reda.

kod primjene Gaussove eliminacije i pogotovu Müller-Breslauove supstitucije, nego se dobivaju jednostavnim multipliciranjem — koje se vrši k tome usporedo s multiplikacijama za određivanje koeficijenata λ'_i — i sumiranjem. Time je ne samo olakšano računanje, nego je uklonjena mogućnost uvlačenja daljih pogrešaka.

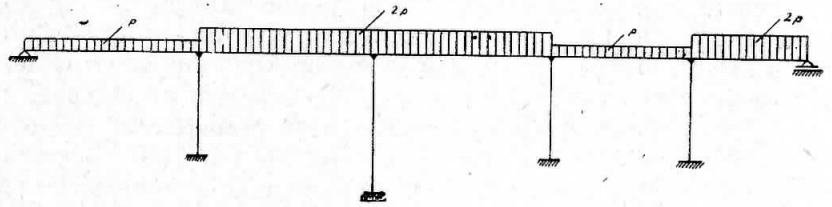
Najpodesnije sastavljanje tablica za izvedbu proračuna pokazat će ovaj

Brojčani primjer

Dana je matrica sistema od osam tročlanih jednadžbi elastičnosti, kao osnov statičkog proračuna kontinuiranog nosača na elastično okretnim ležištima po sl. 1, s ležišnim momentima



Sl. 1



Sl. 2

$M_1 \ldots, M_8$ kao statički neodredivim veličinama. (Tablica I). Proračunat ćemo najprije momente $M_1 \ldots, M_8$ od opterećenja po sl. 2, a zatim konjugiranu matricu.

Tablica I pokazuje ujedno i shemu jednadžbi za računanje koeficijenata λ'_i (nepoznanice lijevo, apsolutni članovi dolje) kao i shemu jednadžbi za računanje koeficijenata λ_i'' (nepoznanice desno, apsolutni članovi gore). Te se jednadžbe prema tome čitaju vertikalno.

TABLICA I.

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	—	↘
	L_1''	0	0	0	0	0	0	0	↖	
λ_1'	57	— 27							λ_1''	N_1
λ_2'	— 27	57	15						λ_2''	N_2
λ_3'		15	66	— 36					λ_3''	N_3
λ_4'			— 36	66	15				λ_4'' ↑	N_4
↓ λ_5'				15	57	— 27			λ_5'' |	N_5
λ_6'					— 27	63	18		λ_6''	N_6
λ_7'						18	63	— 27	λ_7''	N_7
λ_8'							— 27	63	λ_8''	N_8
↘	0	0	0	9	0	0	0	L_n'		

Tablica II sadržava proračun koeficijenata λ'_i. Ispod slomljene crte, koja ograničuje prema dolje glavnu dijagonalu, prepisane su iz dane matrice negativne vrijednosti sporednih koeficijenata $\delta_{i,i-1}$; to su divizori u obrascu (6) za proračun λ'_i. Sa $\lambda'_1 = 1$ pomnožen je prvi red dane matrice (to su članovi desno od stepenaste linije) i upisan u korespondentni red tablice II. Iznad matrice unesen je u koloni 1 brojnik u izrazu za λ'_2, t. j. $\lambda'_1\ \delta_{11} = 57$. Divizijom te vrijednosti s koeficijentom $-\delta_{21} = 27$ ispod slomljene crte dobiven je koeficijent λ'_2. Sa λ'_2 je pomnožen drugi i treći koeficijent u drugom redu dane matrice; produkti su uneseni na korespondentna mjesta tablice II. U koloni 2 je izvršeno sumiranje članova nad slomljenom crtom, i suma [brojnik u izrazu (6)] razdijeljena sa članom ispod slomljene crte (nazivnikom u izrazu (6) za λ'_3); to daje λ'_3, i t. d. Konačno je nakon izračunavanja koeficijenta λ'_8 sumiranjem članova nad slomljenom crtom u koloni 8 dobivena vrijednost $L'_n = -17\,187{,}50$, iz koje je proračunat koeficijent

$$\lambda''_8 = -1 \cdot \frac{10\,000}{17\,187{,}50} = -0{,}5818182.$$

TABLICA II.

Proračun koeficijenata λ'_i

λ'_i \ Σ	57	93,3	— 379,00	— 470,83	1631,250	2958,75	— 9268,125	— 17187,50	1	2	3	4	5	6	7	8	i / k
1,00	57	— 27														— 21625,626	8
2,1	+ 27	120,3	31,6												4438,125	+ 27	7
— 6,2		— 15	— 410,6	224,00									— 847,500	3806,250	— 18		6
— 10,527			+ 36	— 694,83	— 157,916								1789,16	+ 27			5
31,38				— 15													4
60,416																	3
— 164,3750																	2
— 343,2639																	1

$$\lambda''_8 = \frac{10000}{-17187{,}50} = -\underline{0{,}5818182}$$

U tablici III izvršen je na analogan način počevši od tako dobivene vrijednosti $\overline{\lambda}''_8$ proračun koeficijenata $\overline{\lambda}''_7$ do $\overline{\lambda}''_1$. U posljednjoj je koloni dobivena sumiranjem članova ispod slomljene crte vrijednost $\overline{L}''_1 = 10\,000{,}001$, te je prema tome proračun koeficijenata λ'_i i λ''_i točan.

Tablica IV sadržava potpun proračun nepoznatih momenata savijanja M_1 do M_8 za slučaj opterećenja po slici 2. U prve dvije kolone upisane su naprijed proračunate vrijednosti koeficijenata λ'_i i λ''_i, a u trećem stupcu vrijednosti apsolutnih članova:

$$N_1 = -\frac{p l_1^2 l_1'}{4},\quad N_2 = N_3 = -\frac{3 p l_2^2 l_2'}{4},$$

$$N_4 = N_5 = -\frac{3 p l_3^2 l_3'}{4},\quad N_5 = N_7 = -\frac{p l_4^2 l_4'}{4},\quad N_8 = -\frac{3 p l_5^2 l_5'}{4}.$$

$$(p = 1\ \text{t/m})$$

Stupci (IV) do (X) sadržavaju sam proračun, kojemu ne treba objašnjenja.

Tablica V pokazuje potpun proračun konjugirane matrice. U stupcu lijevo kraj matrice upisane su redom vrijednosti koeficijenata λ'_i, a u redu iznad matrice vrijednosti koeficijenata λ''_k. Multiplikacijom jedne vrijednosti λ''_k s koeficijentima λ'_i, do $i = k$, dobiveni su koeficijenti β_{ki} u gornjem dijelu konjugirane matrice, zajedno s koeficijentima na glavnoj dijagonali.[3])

Svi brojčani računi izvršeni u tablicama I do V ponovljeni su nezavisno i spomoću logaritmičkog računala dužine 50 cm. Razlike tako dobivenih rezultata prema tačnim vrijednostima iznose kod članova konjugirane matrice 1—2‰, kod neposredno po shemi tablice IV proračunatih nepoznanica isto tako 1—2‰, izuzetno 3‰. Računanje s pomoću logaritmičkog računala dalo je prema tome, s obzirom na potrebe prakse, više nego dovoljno točne rezultate.

[3]) Proračun je izvršen namjerno po obrascima (25) i (26), da se pokaže njihova praktična primjena. U konkretnom slučaju time stvarno nije postignuta ušteda u radu, jer se zbog specijalnih vrijednosti koeficijenata nepoznatih u danim jednadžbama dobivaju za koeficijente λ^* vrijednosti daleko pogodnije za računanje, nego što su vrijednosti $\overline{\lambda}''_i$.

TABLICA III.

Proračun koeficijenata $\overline{\lambda}''_i$

i \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	$\overline{\lambda}''_i$
1	13264,350	27							232,7079	
2	−3264,349	+6981,403	− 15						120,9018	
3		− 608,291	−2676,480	36					− 40,55272	
4			862,953	−1582,080	− 15				− 23,97091	
5				122,182	464,2909	27			8,145455	
6					−104,7273	244,3637	− 18		3,878789	
7						−24,4364	−85,52729	27	− 1,357576	
8							15,70909	−36,65455	− 0,5818182	
	10000,001	6283,112	− 1813,527	− 1459,898	359,5636	219,9273	− 69,81820	− 36,65455		Σ

TABLICA IV

i	λ_i'	$\overline{\lambda_i''}$	N_i	$\lambda_i' N_i$	$\sum_1^k \lambda_i' N_i$
	(I)	(II)	(III)	(IV) = (I) · (III)	(V)
1	1,0	232,7079	— 843,75	— 843,75	— 843,75
2	2,1	120,9018	— 2 531,25	— 5 343,72	— 6 187,47
3	— 6,2	— 40,55272	— 2 531,25	15 749,99	9 562,52
4	— 10,527	— 23,97091	— 2 531,25	26 648,49	36 211,01
5	31,38	8,145455	— 2 531,25	— 79 453,15	— 43 242,14
6	60,416	3,878789	— 648,00	— 39 150,02	— 82 392,16
7	— 164,3750	— 1,357576	— 648,00	106 515,00	24 122,84
8	— 343,2639	— 0,581818	— 1 350,00	463 406,27	487 529,11
	—	—	(t m²)	(t m²)	(t m²)

TABLICA V

$10^2\ \beta_{ki} =$

λ_i' \ $\overline{\lambda_i''}$	232,7079	120,9018	— 40,55272	— 23,97091
1,00	2,327079	1,209017	— 0,405527	— 0,239709
2,1		2,552372	— 0,856114	— 0,506053
— 6,2			2,523281	1,491524
— 10,527				2,523604
31,38				
60,416				
— 164,3750				
— 343,2639				
	1	2	3	4

Proračun nepoznanica M_i

$\overline{\lambda_i''} N_i$	$\sum_{k+1}^n \overline{\lambda_i''} N_i$	$10^{-4} \overline{\lambda_k''} \sum_1^k \lambda_i' N_i$	$10^{-4} \lambda_k' \sum_{k+1}^n \overline{\lambda_i''} N_i$	$M_i = 10^{-4} \left(\overline{\lambda_k''} \sum_1^k \lambda_i N_i + \lambda_k' \sum_{k+1}^n \overline{\lambda_k''} N_i \right)$
(VI) = (II) · (III)	(VII)	(VIII) = 10^{-4} (II) · (V)	(IX) = 10^{-4} (I) · (VII)	(X) = (VIII) + (IX)
(— 196 347,29)	(— 360 521,01)	— 19,6347	— 16,4174	— 36,0521
— 306 032,68	— 164 173,72	— 74,8076	+ 29,9481	— 44,8595
102 649,07	141 858,96	— 38,7786	— 24,3973	— 63,1759
60 676,37	+ 39 209,89	— 86,8011	22,5994	— 64,2017
— 20 618,18	— 21 466,48	— 35,2227	— 2,6627	— 37,8854
— 2 513,46	— 848,30	— 31,9532	10,0603	— 21,8979
879,71	1 665,16	— 3,2749	— 12,9108	— 16,1857
785,45	785,45	— 28,3653	—	— 28,3653
(t m²)	(t m²)	(t m)	(t m)	(t m)

Konjugirana matrica

$10^{-2}\ \overline{\lambda_k''}\ \lambda_i'$ (m^{-1})

8,145455	3,878789	— 1,357576	— 0,581818	
0,081455	0,038788	— 0,013576	— 0,005818	1
0,171960	0,081886	— 0,028660	— 0,012283	2
— 0,506829	— 0,241347	0,084471	0,036202	3
— 0,857536	— 0,408350	0,142922	0,061253	4
2,556767	1,217507	— 0,426127	— 0,182626	5
	2,343434	— 0,820201	— 0,351515	6
		2,231512	0,956364	7
			0,997172	8
5	6	7	8	k \ i

(Primljeno na sjednici Odjela za matem., fiz. i tehn. nauke 12. III. 1948.)

Dr. FRANJO I. HAVLIČEK

O PROBLEMU PROMJENLJIVE KONSTANTE GRAVITACIJE

Ovaj pokušaj diskusije o utjecaju promjenljive konstante gravitacije uglavnom na Friedmannove jednadžbe polazi od nekih općih pretpostavaka.

Pretpostavke. Gradnja svemira je problem, koji je sam sobom zanimljiv, ali isto tako i važan za opću fiziku. Naše današnje znanje ograničuje se na neke ekstrapolacije, uglavnom na temelju opće teorije relativnosti, i na neke markantne efekte, kao na pomak spektralnih linija prema crvenom udaljenih spiralnih magla, koliko je pristupačan našim teleskopima, i konstantnu srednju gustoću u svemiru. Pomak spektralnih linija obično se tumači kao Dopplerov efekt, i ovo tumačenje traži brzine udaljenih spiralnih magla, koje možemo uspoređivati s brzinom svjetlosti. Te velike brzine traže i goleme kinetičke energije, a nije nam poznato, iz kojeg rezervoara dolaze ove energije. No pomak spektralnih linija prema crvenom možemo tumačiti i kao efekt jakih polja gravitacije. U ovom smislu pokušat ćemo ovdje da damo sliku svemira.

Zavisnost konstante gravitacije od vremena. Kako spektri udaljenih spiralnih magla pokazuju veliku sličnost sa spektrima bliskih magla, moramo uzeti, da se ove magle sastoje od iste vrste zvijezda. Hoćemo li zato tumačiti pomak prema crvenom kao efekt gravitacije, moramo tamo pretpostavljati veću konstantu gravitacije, odnosno vremensku zavisnost konstante gravitacije. Fizikalna dimenzija konstante gravitacije f jest $cm^3\ gr^{-1}\ sec^{-2}$. Ako ćemo upotrebljavati samo donekle pristupačne veličine, mora se uzeti, da je

$$f \approx \frac{1}{\varrho T^2}, \tag{I}$$

gdje je T vrijeme od momenta, kada se neki dio svemira stvorio, a ϱ je gustoća svemira, koju smatramo konstantom u skladu s dosadašnjim mjerenjem. Za prilike našega galaktičkog

sustava T je ca. 10^{10} god., odnosno $3 \cdot 10^{17}$ sec. Konstanta je gravitacije $6{,}7 \cdot 10^{-8}$ cgs; dakle je prema (I) gustoća svemira

$$\varrho = \frac{1}{f T^2} = \frac{1}{6{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \cdot 10^{34}} = 1{,}7 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{gr/cm^3}$$

Ova je veličina u skladu s praktičnim procjenama, koje daju 10^{-26} do 10^{-30} gr/cm^3.

Princip kosmogonije. Elektromagnetski valovi, a vjerojatno i polje gravitacije, šire se brzinom svjetlosti. Prostor svemira širi se dakle stalno tom brzinom. Pretpostavljamo li, da je gustoća ϱ konstantna, pretpostavljamo, da se trajno mase materijaliziraju na rubu svemira, ako on nije u sebi zatvoren. Ekstrapoliramo li unatrag, moramo početi s nekom prvom jezgrom materijalizacije, oko koje se svemir razvija.

Linijski je element u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, koji je zakrivljen po četvrtoj dimenziji, radiusa zakrivljenosti $R = R(T)$ ovaj:

$$ds^2 = -c^2\,dt^2 + R\,dX^2 + R^2 \sin^2 X\, d\vartheta^2 + R^2 \sin^2 X \sin^2 \vartheta\, d\varphi^2$$

ili, uvrstivši $X = x_1$; $\vartheta = x_2$; $\varphi = x_3$; $ct = x_4$:

$$ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + g_{22}\,dx_2^2 + g_{33}\,dx_2^2 + g_{44}\,dx_4^2 .$$

Iz toga linijskog elementa izlaze Friedmannove jednadžbe

$$G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G - \lambda g_{ik} =$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 + 2R\frac{d^2R}{dT^2}\right] - R^2\lambda & (i = k = 1) \\ \frac{3}{R^2} + \frac{3}{c^2 R^2}\left(\frac{dR}{dT}\right) - \lambda & (i = k = 4) \end{cases}$$

Postupat ćemo u smislu opće teorije relativnosti, stavimo li $\varkappa = \frac{8\pi f}{c^2}$, dakle u našem slučaju $\varkappa = 8\pi/c^2 \cdot 1/\varrho T^2$,

$$\varkappa T_{11} = -\varkappa \frac{R^2 p}{c^2}\ ;\ \varkappa T_{44} = \varkappa \varrho, \quad \text{a za } p = 0$$

$$\frac{3c^2}{R^2} + \frac{3}{R^2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 + \frac{6}{R}\frac{d^2R}{dT^2} = 3\lambda c^2$$

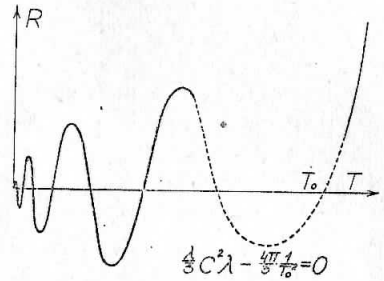
$$\frac{3c^2}{R^2} + \frac{3}{R^2}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 = \lambda c^2 + \varkappa \varrho c^2 .$$

Suptrakcijom izlazi diferencijalna jednadžba

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dT^2} = \frac{1}{3}c^2\lambda - \frac{4\pi}{3}\frac{1}{T^2} .$$

Geometrijska diskusija daje za ovu jednadžbu rješenje

$$\frac{d^2R}{dT^2} = \text{const } R \text{ za } T^2 \gg T_0^2, \quad R = e^{c\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\,T} .$$



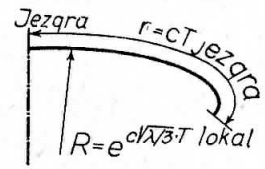
Procjenjujući kosmološke konstante λ nailazimo na teškoće, jer moramo nešto kazati o materijalizaciji, koja se vrši ovdje diskontinuirano zbog početnih negativnih R. Dijelimo li na primjer masu protona $1{,}7 \cdot 10^{-24}$ s ϱ, izlazi volumen 10^4 cm^3, odnosno neka linearna dimenzija veličine oko 14 cm.

S relacijom $r = c\,T$ nalazi se u smislu principa širenja prostora od početne jezgre T_0, $14/3 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^{-10}$ sec, a λ prema

$$\frac{1}{3}c^2\lambda - \frac{4\pi}{3}\frac{1}{T_0^2} = 0 \qquad \lambda = \frac{4\pi}{c^2 T_0^2} = 0{,}05$$

Neki veći T_0 daje, dakako, manji λ, manji T_0 veći λ.

Analogni trodimenzionalni model svemira imao bi oblik:



Kako R eksponencijalno raste, nastali bi znatni efekti zakrivljenosti samo na rubu svemira. Prema A. Haasovoj relaciji

energija je mase svemira po prilici jednaka negativnoj energiji gravitacije masa svemira. Zakon energije ne čini dakle u ovoj teoriji teškoće, jer se bilancija energija stalno izjednačuje.

Pomak spektralnih linija. Prema Chandrasekharovoj formuli postoji između mase m i radiusa p zvijezde približna relacija

$$p \approx m^{1/2} f^{3/4}.$$

Kako sa spiralnih magla dolazi uglavnom svjetlost G-zvijezda, možemo napisati formulu za pomak spektralnih linija prema crvenome zbog polja gravitacije

$$\Delta\nu = \frac{f m}{p c^2} \approx \frac{f m}{m^{1/2} f^{3/4}} = m^{1/2} f^{1/4} \approx m^{1/2} \frac{1}{T_{lok}^{1/2}},$$

dakle

$$T_{lok} \approx \frac{1}{\Delta\nu^2}.$$

Za Sunce je pomak prema crvenom $\Delta\lambda = 0{,}012$ Å kod 6000 Å. Vrijedi dakle

$$\nu - \Delta\nu = \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda} \frac{1}{1 + \Delta\lambda/\lambda} = \frac{c}{\lambda}\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) = \frac{c}{\lambda} - \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

odnosno

$$\Delta\nu = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda^2} \qquad \text{te } \Delta\nu_0 = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-10}}{36 \cdot 10^{-10}} = 10^9.$$

U ekstremnim slučajevima je $\Delta\lambda = 290$ Å kod 3890 Å, dakle

$$\Delta\nu = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-6}}{3{,}89^2 \cdot 10^{-10}} = 5{,}7 \cdot 10^{13}.$$

Ako je sada $T_0 = 10^{10}$ god., onda je

$$T_{lok} = 10^{28} \frac{1}{\Delta\nu^2} \rightarrow \text{nekoliko godina.}$$

Za udaljenost D našeg sustava od drugoga s pomakom frekvencije, koji odgovara vremenu T_{lok}, pa, ako je naš položaj centralan, vrijedi

$$\frac{D}{c} + T_{lok} + \frac{D}{c} = T_0 \quad \text{ili} \quad D = \frac{c}{2}(T_0 - T_{lok}),$$

t. j.

$$D = \frac{1}{2}\left(10^{10} - 10^{28} \frac{1}{\Delta\nu^2}\right) \text{ godina svjetlosti.}$$

Te ekstrapolacije daju samo red veličina. No svakako bismo morali očekivati promjene ekstremnih spektra u dogledno vrijeme. Hubbleova relacija tražila bi razmjerno malene promjene za veoma udaljene spiralne magle (Novi teleskop s promjerom 5 m u Kaliforniji morao bi nam pokazati rub svemira, odnosno asimetrije s obzirom na kuglinu simetriju, jer možemo pretpostaviti, da se ne nalazimo baš u središtu svemira).

Spiralne magle. Spiralne magle vjerojatno nastaju zbog kontrakcije prvobitnog plina. No spiralna se struktura može u okviru ove teorije tumačiti jakom zakrivljenošću ruba svemira i brzom promjenom te zakrivljenosti baš na početku kontrakcije. Za masu spiralne magle uzimamo da je ca 10^{42} gr, radius r ca 2000 parsec $= 6 \cdot 10^{21}$ cm.

Kutna brzina vanjskih dijelova izlazi iz

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{mf}{r^2} \text{ za } \dot{\varphi}^2 = \frac{10^{42} \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-8}}{0{,}22 \cdot 10^{66}} = 3 \cdot 10^{-31}, \text{ te } \dot{\varphi} = 0{,}6 \cdot 10^{-16}.$$

Za 10^{17} sec rotira dakle magla za

$$u = \frac{\dot{\varphi} T}{2\pi} = 0{,}6 \cdot 10^{-16} \cdot \frac{10^{17}}{2\pi} \approx 1.$$

Razdjeljenje zvijezda odgovara toj procjeni.

Konstanta drugog Keplerova zakona je za vanjske slojeve

$$c = r \cdot v = r^2 \dot{\varphi} = 36 \cdot 10^{42} \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-16} = 2{,}2 \cdot 10^{27}\ cm^2/sec.$$

Za radius u vrijeme $T_{lok} = 10^{16}$ sec nalazi se

$$\frac{v^2}{r} = \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{r} = \frac{r^4\dot{\varphi}^2}{r^3} = \frac{c^2}{r^3} = \frac{m}{\varrho T^2 r^2},$$

dakle

$$r = T^2 \frac{\varrho c^2}{m},$$

dakle

$$r = 10^{32} \frac{1{,}7 \cdot 10^{-28} \cdot 5 \cdot 10^{54}}{10^{42}} \approx 10^{17}\ cm.$$

Omjer radiusa $r_{10}{}^{17}$ i $r_{10}{}^{16}$ iznosi $1 : 10^5$, što znatno reducira prosječnu udaljenost pojedinih zvijezda, a to je i potrebno za tumačenje razmjerno velikog broja dvostrukih zvijezda. Skoro sve moderne teorije dvostrukih zvijezda pretpostavljaju kao uzrok postanja njihova bliske prolaze među zvijezdama.

Sunčani sustav. Udaljenost je nekog planeta od Sunca

$$r = T^2 \frac{\varrho c^2}{m}$$

Omjer radiusa za vremena 10^{17} i 10^{16} sec bit će dakle $1 : 100$. Planet Pluton trebalo bi da se nalazio u vrijeme 10^{16} sec udaljen ca. 0,4 današnjega radiusa puta Zemlje oko Sunca, to jest u današnjoj udaljenosti planeta Merkura. Kako ono, što vrijedi za današnje nazore o kosmogoniji dvostrukih zvijezda, vrijedi i za sunčani sustav, ova je teorija prikladna i za tumačenje sunčanog sustava.

Zanimljive su posljedice te teorije za problem Mjeseca. Keplerova konstanta je s obzirom na Zemlju $4 \cdot 10^{15}$ cm²/sec. Radius je njegova puta dakle

$$r = T^2 \frac{1{,}7 \cdot 10^{-28} \cdot 16 \cdot 10^{30}}{5{,}5 \cdot 10^{27}} = 4{,}9 \cdot 10^{-25} \cdot T^2.$$

Mjesec bi se raspao svakako, ako vrijedi relacija

$$\frac{M}{R^2} f = \frac{m}{r^2} f,$$

gdje je M masa Zemlje, R udaljenost površine Mjeseca od središta Zemlje, m masa Mjeseca i r njegov radius.

Dakle za minimalnu udaljenost R'

$$R' = r \sqrt{\frac{M}{m}} = 1{,}7 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{1}{0{,}0122}} = 15{,}4 \cdot 10^8 \, cm.$$

Udaljenost središta Zemlje i Mjeseca je prema tome $17{,}1 \cdot 10^8$ cm, čemu odgovara vrijeme

$$T^2 = \frac{1{,}54 \cdot 10^9}{4{,}9 \cdot 10^{-25}} = 0{,}31 \cdot 10^{34} \quad \text{ili} \quad T = 5{,}6 \cdot 10^{16} \, sec.$$

Mjesec nije dakle mogao biti pratilac Zemlje dulje od

$$30 \cdot 10^{16} - 5{,}6 \cdot 10^{16} = 2{,}4 \cdot 10^{17} \, sec.$$

Ovaj je rezultat u skladu s vjerojatno ekstraterestričkim porijeklom Mjeseca.

Zaključak. Da se diskutira utjecaj promjenljive konstante gravitacije, uvodi se, pored relacije između konstante gravitacije, gustoće svemira i galaktičkoga vremena, koja u okviru današnjih mjerenja daje ispravne rezultate, princip kosmogonije, koji tvrdi, da se svemir radijalno širi iz jedne jezgre brzinom svjetlosti, pri čemu se mase materijaliziraju s prosječnom gustoćom svemira. Ovaj princip kosmogonije je potreban, jer se ne mogu bez njega tumačiti različita lokalna vremena odnosno pomak spektralnih linija prema crvenom iz jakih polja gravitacije udaljenih spiralnih magla. Kako je prema A. Haasovoj relaciji energija mase svemira po prilici jednaka negativnoj energiji gravitacije masâ svemira, ne donosi ni zakon energije teškoće. Primjena pretpostavaka na Friedmannove jednadžbe pokazuje diskontinuiranu materijalizaciju masâ, koja je u vezi s kosmološkom konstantom. Iz oblika ruba svemira može se tumačiti spiralna struktura magla, a posljedice za galaktički i sunčani sustav u skladu su s današnjim nazorima o postanku dvostrukih zvijezda i planeta. Hubbleova relacija nije u okviru ove teorije linearna, i ta teorija traži razmjerno brze promjene u spektrima vrlo udaljenih spiralnih magla.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 1. IV. 1948.)

Dr. VILIM NIČE

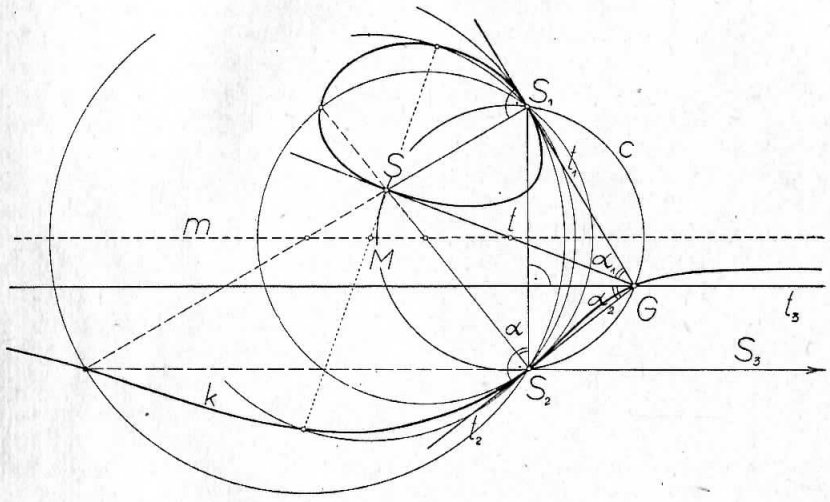
O STROFOIDALI I PROSTORNOJ KRIVULJI 4. REDA NA KUGLI

U v o d: Odaberimo u ravnini po volji tri točke S, S_1 i S_2, a točkama S_1, S_2 neka je određen pramen kružnica $(S_1 S_2)$. Točka S neka je vrh pramena pravaca, koji je projektivno pridružen pramenu $(S_1 S_2)$ kružnica tako, da svaka zraka prolazi središtem njoj pridružene kružnice. Proizvod ovih dvaju pramenova bit će cirkularna krivulja 3. reda roda prvoga, ako točke S_1, S_2 ne padaju skupa, kojoj je točka S četverostruki fokus[1]. Uz realan par rastavljenih točaka S_1, S_2 raspada se ovakova krivulja u dva dijela. K. van Rees nazvao je ovu krivulju fokalnom krivuljom, dok ju M. Lagrange zove strofoidalom, a tako ćemo je i mi zvati. Ovom krivuljom bavilo se osim spomenutih i dosta drugih matematičara, kao Chasles, Schröter, Durège, J. Steiner i drugi, koji su otkrili mnogo njenih osobina, po kojima se ona razlikuje od ostalih cirkularnih krivulja 3. reda. Postoje međutim još neka njena zanimljiva svojstva, koja spomenuti pisci, čini se, nisu zapazili, ili ne barem u ovakvom obliku, a koja ćemo mi u ovoj radnji izvesti pomoću vrlo jednostavnih sredstava. Kao specijalan slučaj ovakve krivulje javljaju se strofoide, pa će naša razmatranja biti prenesena i na te krivulje. Svaku cirkularnu krivulju 3. reda možemo smatrati stereografskom slikom neke prostorne krivulje 4. reda na kugli. Na temelju toga prenest ćemo nađene osobine i na kugline prostorne krivulje 4. reda.

1. Uzmimo u uvodu spomenute točke S, S_1 i S_2 kao zadane nosioce spomenutih pramenova. Na simetrali m dužine $S_1 S_2$ nalaze se središta svih kružnica pramena $(S_1 S_2)$. Povučemo li točkom S bilo koju zraku i njome presiječemo pravac m u točki M, tada kružnica, koja prolazi točkama S_1, S_2, a središte joj je u točki M, siječe tu zraku u točkama naše strofoidale k (vidi sliku). Poznata je činjenica, da se točke S, S_1 i S_2 nalaze na toj krivulji. Uzmemo li u pramenu kružnica $(S_1 S_2)$ onu kružnicu c, koja prolazi točkom S, tada će se u točki S, na pridru-

[1] G. Loriá: Spezielle algeb. und transc. ebene Kurven, Bd. I., str. 35.

ženoj zraci ove kružnice, nalaziti dvije točke krivulje k. Kružnici c u pramenu $(S_1 S_2)$ pridružena je zraka t u pramenu pravaca (S), pa će prema tome ta zraka biti tangenta krivulje k u točki S. Treću točku krivulje k na toj zraci t označimo s G. Zraka t siječe prema tome krivulju k u točki G i tangira u točki S. Povucimo točkom S tangente na krivulju k. Osim jednog para običnih imaginarnih tangenata postoji tu i par izotropnih tangenata[2], t. j. ove posljednje imaginarne tangente diraju krivulju k u apsolutnim točkama ravnine. Diralište jedne



tangente, povučene iz točke G na krivulju k, mora također ležati na tom neizmjerno dalekom pravcu, jer to izlazi iz poznate činjenice: Ako neki pravac siječe krivulju 3. reda u tri realne točke, a iz ovih povučemo tangente na tu krivulju, tada po tri dirališta ovih tangenata leže opet na jednom pravcu[3]. U našem smo slučaju krivulju presjekli pravcem t u tri točke, od kojih dvije padaju zajedno u točki S, a treća je točka G. Prvim dvjema povučene su izotropne tangente s diralištima u apsolutnim točkama ravnine, dakle mora po upravo navedenom stavku i diralište jedne tangente, povučene iz točke G, imati svoje diralište u neizmjerno dalekom pravcu ravnine. Iz toga izlazi, da je ova tangenta t_3 asimptota, dakle je točka G

[2] G. Loria: Cit. pod 1), str. 34.
[3] H. Durège: Die ebenen Curven dritter Ordnung, čl. 383., str. 210.

glavna točka[4] krivulje k. Budući da se neizmjerno daleka točka krivulje k nalazi na onoj zraci pramena (S), koja je okomita na spojnici $S_1 S_2$ (pravac je $S_1 S_2$ naime kružnica pramena $(S_1 S_2)$, kojoj je središte neizmjerno daleko); tada mora biti i $t_3 \perp S_1 S_2$, t. j. $t_3 \parallel m$.

Produžimo li spojnicu $S_1 S$ do pravca m, a ovo sjecište uzmemo kao središte nove kružnice u pramenu $(S_1 S_2)$, tada u točki S ima ova kružnica i krivulja k dvije točke zajedničke, t. j. tangenta t_1 ove kružnice je i tangenta krivulje k u toj točki. Budući da je $t_1 \perp S_1 S$, a dužina SG promjer kružnice c, to mora i tangenta t_1 krivulje k u točki S prolaziti točkom G. Posve analogno prolazi točkom G i tangenta t_2 krivulje k u točki S_2. Točkom G idu dakle četiri tangente krivulje k, naime t, t_1, t_2, t_3, pa zato njihova dirališta S, S_1, S_2 i neizmjerno daleka točka S_3 krivulje k čine točki G pridruženu četvorku korespondentnih točaka (Punktquadrupel)[5].

Za ovakvu četvorku točaka izvest ćemo sada jednu njihovu osobinu, koja će nam kasnije trebati. Znamo, da tangente krivulje u točkama neke četvorke korespondentnih točaka prolaze jednom i istom točkom G te krivulje. Spojimo po dvije točke ovakve četvorke i presijecimo tima dvjema spojnicama našu krivulju k u točkama L_1, L_2. Iz poznatih svojstava krivulja 3. reda proizlazi, da će tangente krivulje k u točkama L_1, L_2 prolaziti sjecištem te krivulje s njenom tangentom u točki G. Točke L_1, L_2 mogu biti ili obje na ovalu ili obje na beskonačno dugom dijelu krivulje k. Radi šest mogućih spojnica postoje tri ovakva para točaka L_1, L_2, od kojih je uvijek jedan na beskonačno dugom dijelu, a dva na ovalu. Budući da je za svaku realnu četvorku korespondentnih točaka točka G uvijek na beskonačno dugom dijelu, a na tome se dijelu nalazi i sjecište krivulje k s njenom tangentom u točki G, to svaki par točaka L_1, L_2 mora biti jedna i ista točka. Iz svake točke na beskonačno dugom dijelu krivulje možemo naime povući samo dvije tangente na oval i samo dvije tangente na beskonačno dugi dio te krivulje, a ne četiri odnosno tri, kako bi to bilo, kada bi točke L_1, L_2 bile rastavljene. Vidimo dakle, ako točke neke četvorke korespondentnih točaka u parovima spojimo, tada se tri dobivena međusobna sjecišta tih spojnica nalaze na toj krivulji. Ovu činjenicu spominje već i J. Steiner, ali bez dokaza.

Označimo na našoj slici kutove, što ih čine pravci t_1 t, t_3 t_2 i kut $S_1 S_2 S$ s α_1, α_2 i α. Budući da je $SS_2 \perp t_2$ i $S_1 S_2 \perp t_3$, izlazi,

[4] G. Loria: Cit. pod 1), str. 33.
[5] H. Durège: Cit. pod 3), čl. 378, str. 207.

da je $\alpha_2 = \alpha$. A kako se vrhovi S_2, G nalaze na istoj kružnici, kojoj je SS_1 tetiva, izlazi, da je $\alpha_1 = \alpha$. Odavle konačno proizlazi, da su kutovi α_1, α_2 jednaki.

K. van Rees, a kasnije i J. Steiner našli su, da se ovakve krivulje k mogu definirati i kao geometrijsko mjesto točaka, iz kojih se dvije zadane dužine vide pod jednakim kutovima[6]. Uzme li se u račun i suplementni kut, tada je pokazao J. Steiner, da postoje dvije takve krivulje.

Već iz definicije ovakvih krivulja po K. van Reesu i Steineru izlazi, da su u krajnjim točkama ovakvih dužina određene i njihove tangente u tim točkama, a na njima se nalaze i sva tri sjecišta parova spojnica u parovima spojenih zadanih četiriju krajnjih točaka, jer i ta sjecišta zadovoljavaju definiciju. Iz jednakosti kutova $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ kao i činjenice da točke S, S_1, S_2 i S_3 čine četvorku korespondentnih točaka izlazi, da sve navedeno vrijedi i za našu krivulju k odnosno njene točke S, S_1, S_2, S_3. Naša krivulja k je prema tome i geometrijsko mjesto točaka, iz kojih će se obje dužine omeđene točkama S, S_1, S_2, S_3 vidjeti pod jednakim kutovima, jer se spomenuto geometrijsko mjesto kao krivulja podudara s krivuljom k u više od devet točaka.

Uzmemo li prema tome dužine SS_1 i S_2S_3 kao zadane, tada možemo našu krivulju k shvatiti i kao geometrijsko mjesto točaka, iz kojih će se ove dvije dužine vidjeti pod jednakim kutovima.

Znamo, da točke S, S_1, S_2 i S_3 čine četvorku korespondentnih točaka krivulje k, pridruženih točki G na toj krivulji, a za svaku četvorku ovakvih točaka postoji ovaj poznati stavak: Ako iz neke točke krivulje 3. reda povučemo sve četiri tangente na tu krivulju, a četiri dobivena dirališta spojimo s bilo kojom točkom te krivulje, tada ove spojnice sijeku krivulju u takve dalje četiri točke, da će njene tangente u tim točkama prolaziti opet jednom točkom te krivulje[7]. Spojimo li prema tome bilo koju točku K krivulje k s točkama S, S_1, S_2, S_3, i tim spojnicama presiječemo krivulju k, tada nastala četiri sjecišta čine opet četvorku korespondentnih točaka pridruženih nekoj točki na krivulji k. Putujemo li neprekinuto s točkom K po krivulji k, dobit ćemo svih ∞^1 četvorki korespondentnih točaka na ovoj krivulji. Realne četvorke korespondentnih točaka daju uvijek njima pridruženu točku G (njom prolaze tangente krivulje u tim točkama), koja se nalazi na onom dijelu naše dvodijelne

[6] J. Steiner: Gesam. Werke, Bd. II., str. 487.
[7] H. Durège: Cit. pod 3), str. 210.

krivulje k, na kojoj se nalazi njena realna neizmjerno daleka točka. Nazovimo ovaj dio krivulje k njenim beskonačno dugim dijelom. Na ovom dijelu nalaze se uvijek dvije točke svake realne četvorke, dok se preostale dvije nalaze na ovalu krivulje.

Na temelju malo prije spomenutog stavka smo vidjeli, da se iz naše četvorke S, S_1, S_2, S_3 korespondentnih točaka može dobiti svih ∞^1 takvih četvorki N, N_1, N_2, N_3 na našoj krivulji. Neka je jedna takva četvorka nastala pomoću neke točke K iz točaka S, S_1, S_2, S_3. Potražimo li sada geometrijsko mjesto točaka, iz kojih će se dužine NN_1, N_2N_3 vidjeti pod jednakim kutovima, to će se na toj krivulji sigurno nalaziti točke N, N_1, N_2, N_3 i K, kao i apsolutne točke ravnine. Spojimo li točke N, N_1, N_2, N_3 u parovima, tada se i sva tri sjecišta tih šest spojnica nalaze na toj krivulji, jer se spomenute dužine i iz tih sjecišta vide pod jednakim kutovima. Ali ovih deset točaka nalazi se i na našoj krivulji k, dakle je to jedna i ista krivulja, jer je isključena i mogućnost pramena takvih krivulja, kao kada bi ova bila određena samo sa devet točaka.

Što vrijedi za četvorku točaka S, S_1, S_2, S_3 vrijedi prema tome i za svaku drugu realnu četvorku korespondentnih točaka na krivulji k. Možemo dakle za našu krivulju k napisati ovaj stavak:

Spojimo li parove točaka neke četvorke korespondentnih točaka na strofoidali u dvije dužine, tada se ove dužine vide pod jednakim kutovima iz svake točke ove krivulje.

Ovaj stavak zapravo je već poznat u drugom obliku nekim starijim autorima (na pr. H. Schröteru), ali izveden i izrečen na ovaj način vodi nas on direktno do novog, dosada čini se nezapaženog stavka. Budući da naše dužine mogu biti i tako postavljene, da se jedna nalazi u ovalu, a druga u beskonačno dugom dijelu, a te se vide pod jednakim kutovima iz svake točke beskonačno dugog dijela, dakle i iz one točke G, u kojoj se sastaju tangente te krivulje u točkama četvorke, izlazi odavle eto i naš nagoviješteni stavak, koji je zapravo već sadržan u gornjem stavku:

Oba dijela dvodijelne strofoidale vide se iz svake točke njena beskonačno dugog dijela pod jednakim kutovima.

2. Odaberemo li pramen kružnica $(S_1 S_2)$ u toč. 1. tako, da ove dvije točke padnu skupa, t. j. sve kružnice ovog pramena imaju zajedničku tangentu i diralište, tada ovakav pramen kružnica i pramen pravaca (S), projektivno pridruženi na opisani način, daju kosu strofoidu[8]. Ako se točka S nalazi na

[8] H. Wieleitner: Spezielle ebenen Kurven, (Sam. Schub. LVI), str. 38.

spomenutoj zajedničkoj tangenti, onda je nastala strofoida uspravna. Vidimo dakle, da su strofoide samo specijalni slučajevi strofoidale. Od četiri tangente ove krivulje, povučene iz neke točke na toj krivulji, padaju dvije skupa, t. j. kod strofoida prelaze u spojnicu s dvostrukom točkom, jer dvostruka točka je ono mjesto, koje dijeli oval od beskonačno dugog dijela ove krivulje.

Na temelju dosadašnjih naših izvoda i zaključaka kod strofoidale možemo prema tome i za kosu i za uspravnu strofoidu napisati ovaj stavak:

Spojnica svake točke uspravne ili kose strofoide s njenom dvostrukom točkom raspolavlja kut tangenata ove strofoide povučenih ovom točkom.

Odavle direktno izlazi i poznata činjenica, da su tangente strofoida u dvostrukoj točki međusobno okomite.

Definiramo li strofoidalu kao geometrijsko mjesto točaka, iz kojih se dvije zadane dužine vide pod jednakim kutovima, tada će ova krivulja prijeći u strofoidu, ako zadane dužine imaju jednu zajedničku krajnju točku. Strofoidu možemo prema tome definirati i ovako:

Strofoida je geometrijsko mjesto točaka, iz kojih se dvije iste stranice nekog zadanog trokuta vide uvijek pod jednakim kutovima.

Parovi konjugiranih točaka na nekoj krivulji 3. reda roda nultoga su dirališta tangenata ove krivulje povučenih iz točaka te krivulje. Ovi parovi analogni su četvorkama korespondentnih točaka na krivuljama 3. reda roda prvoga. Primijenimo li naša dosadašnja razmatranja na strofoidali u toč. 1. na obične strofoide, u vezi s parovima njenih konjugiranih točaka, tada za ove možemo izreći i ovaj stavak:

Spojimo li bilo koji par konjugiranih točaka strofoide s bilo kojom njenom točkom, tada spojnica ove točke s dvostrukom točkom te strofoide raspolavlja uvijek nastali kut.

Iz ovoga stavka izlazi poznata činjenica, da tangente ovih krivulja u dvostrukoj točki raspolavljaju oba kuta, što ga čine spojnice svakog para konjugiranih točaka s dvostrukom točkom. Ove su među sobom okomite tangente dvostruke zrake involutornog pramena zraka, što ga čine spojnice dvostruke točke s parovima konjugiranih točaka.

O strofoidama postoji obilna literatura, naročito starijeg datuma, pa su opisana svojstva tih krivulja bila po svoj prilici poznata nekim autorima. No njihov je put do otkrića bio vjerojatno različit od našega, a za nas su izvedena svojstva od

osobitog značenja upravo zato, što smo ih na tim krivuljama izveli kao na specijalnom slučaju strofoidale. Da je strofoidala zapravo posve općena strofoida, našao je već M. Lagrange.

3. Rezultate naših razmatranja na strofoidama i strofoidalama u toč. 1. i 2. prenest ćemo sada i na neke prostorne krivulje 4. reda. Na ravnini naše krivulje k postavimo kuglinu plohu tako, da ona stoji upravo na točki S naše slike. Dijametralno iznad točke S postavljenu točku O na toj kugli uzmimo kao središte stereografske projekcije ove kugle na ravninu krivulje k. Projiciramo li krivulju k iz točke O na ovu kuglu, tada će nastala krivulja na kugli biti prostorna krivulja 4. reda (ciklična krivulja). Realna neizmjerno daleka točka krivulje k projicira se u točku O. Može se vrlo jednostavno pokazati, da ova krivulja može nastati i kao potpuni prodor s jednoplošnim hiperboloidom, koji je nastao kao proizvod dvaju projektivnih svezaka ravnina, kojima su osi spojnica SO i spojnica slika točaka S_1, S_2 na kugli. Kružnice pramena $(S_1 S_2)$ možemo smatrati stereografskim slikama presječnih kružnica kugle s ravninama ovoga drugog sveska, dok su pravci točke S stereografske slike presječenih kružnica kugle s ravninama sveska osi SO.

Poznato je, da se ciklična krivulja 4. reda na kugli projicira stereografski u cirkularnu krivulju 3. reda onda, ako je centar projiciranja na toj cikličnoj krivulji. Uzmimo na našoj kuglinoj plohi neku drugu cikličnu krivulju 4. reda, koja prolazi točkom O, ali ne i dijametralnom točkom S. Njena stereografska projekcija na ravninu krivulje k bit će opet neka cirkularna krivulja 3. reda k_1. Promjer OS naše kugle ima smjer konjugiran (okomit) smjeru ravnine naših slika s obzirom na našu kuglu, dakle imaginarni par tangencijalnih ravnina kugle, postavljen promjerom OS, dira tu kuglu u apsolutnim točkama te ravnine. Tim apsolutnim točkama prolaze i naše cirkularne krivulje k i k_1, dakle će izotropne presječnice naše ravnine slike s parom spomenutih imaginarnih tangencijalnih ravnina kugle morati biti tangente krivulja k i k_1 u apsolutnim točkama, t. j. stereografska slika točke S je četverostruki fokus krivulje k. Odavle izlazi, da se dijametralna točka centra projiciranja O projicira stereografski uvijek u četverostruki fokus projicirane cirkularne krivulje 3. reda. Taj fokus bit će na krivulji k_1, odnosno k, samo onda, ako ciklična krivulja 4. reda na kuglinoj plohi prolazi i dijametralnom točkom centra O (u našem slučaju točkom S). Vidimo dakle, da će se neka prostorna krivulja 4. reda na kugli moći stereografski projicirati samo onda u strofoidalu ili strofoidu (ako ima dvostruku točku), ako središtem projiciranja na toj kugli i krivulji prolazi jedna

takva njena bisekanta, koja prolazi i središtem kugle. Ovakve bisekante mogu postojati samo dvije[9], dakle na svakoj prostornoj krivulji 4. reda na nekoj kugli postoje najviše dva para točaka, iz kojih se ta krivulja može stereografski projicirati u strofoidalu ili strofoidu, ako ta ciklična krivulja ima dvostruku točku.

Svaka bisekanta ove prostorne krivulje na kugli, koja prolazi točkom O, daje na našoj strofoidali k jednu točku, a tangencijalne ravnine te prostorne krivulje, položene ovom bisekantom, sijeku ravninu krivulje k u njenim tangentama. Budući da stereografska projekcija preslikava konformno, bit će jednaki kutovi, u kojima tangencijalne ravnine prostorne krivulje, položene jednom bisekantom točke O, sijeku tangencijalnu ravninu kugle i ravninu krivulje k u njenim probodištima. Kako se oba dijela strofoidale vide pod jednakim kutovima iz svake točke samo njezina beskonačno dugog dijela, a centar O se strereografski projicira u neizmjerno daleku točku, možemo na temelju naših razmatranja na strofoidali, kao i na prostornoj krivulji 4. reda na kugli, za te posljednje napisati ovaj stavak:

Na prostornoj krivulji 4. reda na nekoj kugli, koja se sastoji iz dva dijela, mogu postojati najviše dva para ovakvih točaka: Parovi tangencijalnih ravnina na oba dijela ovakve krivulje, položenih bilo kojom bisekantom, koja prolazi jednom od spomenute četiri točke i siječe isti dio krivulje, sijeku obje tangencijalne ravnine kugle u probodištima tih bisekanata u pravcima, koji su krakovi jednakih kutova.

Iz dosadašnjih razmatranja očito izlazi, da ove točke u parovima leže na promjerima kugle.

Ako prostorna krivulja 4. reda na kugli ima dvostruku točku, njena će stereografska projekcija iz spomenutih točaka biti strofoida. Na temelju onoga, što smo naprijed kazali za strofoide, možemo izreći još i ovaj stavak:

Na prostornoj krivulji 4. reda na nekoj kugli, koja ima dvostruku točku, mogu postojati najviše dva para ovakvih točaka: Tangencijalne ravnine položene na tu krivulju bilo kojom bisekantom ovakve točke, koja siječe tu krivulju na istom dijelu (oba dijela rastavlja dvostruka točka), sijeku tangencijalne ravnine kugle u probodištima te bisekante u pravcima, koji su krakovi jednakih kutova, koje uvijek raspolavljaju presječnice tih ravnina s ravninom te bisekante i dvostruke točke.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 18. V. 1948.)

[9] Th. Reye: Die Geometrie der Lage, Abt. III., str. 34.

Dr. VILIM NIČE

O PLÜCKEROVU I NEKIM DRUGIM KONOIDIMA 3. I 4. REDA

U v o d. Plückerov konoid sigurno je najjednostavnija, ali i najzanimljivija pravčasta ploha 3. reda. Taj konoid javlja se vrlo često u prostornoj geometriji, a najpoznatiji je kao geometrijsko mjesto okomica spuštenih iz točaka kosog presjeka nekog uspravnog kružnog valjka na jednu njegovu izvodnicu. Postanak njegov definiran je međutim još na nekoliko raznih načina.[1] Radi toga istraživan i istražen je on temeljito tako, da mu danas poznajemo veliki broj zanimljivih osobina. Ima ipak još takvih njegovih osobina, koje nisu nigdje direktno zabilježene, iako bi se spomoću poznatih dale indirektno naći. Ali kako se one dadu odrediti i direktno spomoću vrlo jednostavnih sredstava, saopćit ćemo ih u ovoj radnji. Radi se o takvim svojstvima toga konoida, koja su u vezi s četverostrukim fokusima cirkularnih projekcija ravninskih presjeka toga konoida na njegove direkcione ravnine. Naša razmatranja prenijet ćemo i na neke konoide 3. i 4. reda, koji imaju svojstva analogna Plückerovu.

I. Neka su Plückerov konoid i neki pravac p zadani tako, da taj pravac bude mimosmjeran i okomit na dvostruki pravac toga konoida. Izvodnice i_1, i_2, koje prolaze konačnim probodištima toga pravca s konoidom, sijeku se na dvostrukom pravcu konoida, recimo u točki V, a leže zajedno s tim pravcem u direkcionoj ravnini ϱ. Pravac p neka siječe te izvodnice u točkama J_1, J_2. Svaka ravnina pravca p siječe naš konoid u nekoj krivulji 3. reda roda nultoga, a sve te krivulje prolaze točkama J_1, J_2. Tangente ovih krivulja u tim točkama bit će presječnice ravnina tih krivulja s tangencijalnim ravninama konoida u točkama J_1, J_2, dakle će se sjeći na presječnici s tih tangencijalnih ravnina, koja prolazi točkom V.

Uzmimo sada, da se pravac p nalazi u neizmjerno dalekoj ravnini. U toj ravnini nalazi se također par imaginarnih, i to izotropnih izvodnica našega konoida.[2] Pravac p neka siječe te

[1] E. Müller-J. Krames: Vorlesungen über darstellende Geometrie (Leipzig 1931.), Bd. III., str. 204.—214.

[2] E. Müller-J. Krames: Cit. pod 1), str. 204.

izvodnice u paru neizmjerno dalekih konjugirano imaginarnih točaka J_1, J_2. Točka V je u tom slučaju neizmjerno daleka točka dvostrukog pravca konoida. Ravnine pravca p dat će u konačnosti svezak usporednih ravnina, koje konoid sijeku u krivuljama 3. reda roda nultoga. Parovi imaginarnih tangenata ovih presječnih krivulja u njihovim imaginarnim neizmjerno dalekim točkama J_1, J_2, sjeći će se u realnim točkama. Ova realna sjecišta leže na pravcu s, usporednom s dvostrukim pravcem konoida, jer on prolazi neizmjerno dalekom točkom V toga dvostrukog pravca.

Projiciramo li sve ovo u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu toga konoida, projicirat će se imaginarne točke J_1, J_2 u apsolutne točke ove ravnine projekcija, a pravac s u jednu njenu točku. Budući da se parovi tangenata presječnih krivulja u točkama J_1, J_2 sijeku na pravcu s, svi će se ti parovi projicirati u jedan zajednički par tangenata projiciranih presječnih krivulja s ravninama neizmjerno dalekog pravca p. Ovaj će par tangenata dirati sve te projekcije presječnih krivulja u apsolutnim točkama ravnine projekcija, koje su im svima zajedničke. Sve su te projekcije dakle unikurzalne cirkularne krivulje. Probodište pravca s s ravninom projekcija bit će zajednički četverostruki fokus čitavog nastalog pramena unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga u ravnini projekcija. Siječemo li dakle Plückerov konoid sveskom paralelnih ravnina i presječne krivulje projiciramo u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, imat će cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga tako nastalog pramena u toj ravnini zajednički četverostruki fokus.[3]

Jedna cirkularna krivulja ovog pramena raspada se u kružnicu i pravac, jer je jedna izvodnica konoida usporedna s tim ravninama presjeka. Središte ove kružnice bit će taj četverostruki fokus. Ova činjenica omogućuje nam uostalom vrlo jednostavnu konstrukciju toga četverostrukog fokusa.

II. Vratimo se sada na pravac p u ravnini ϱ realnih izvodnica i_1, i_2. Negdje na tom pravcu odaberimo po volji točku S, koja neka bude vrh pramena pravaca p u ravnini ϱ. Zrake ovog pramena sijeku izvodnice i_1, i_2 u perspektivnim nizovima, a poznato je, da su točke izvodnica vitopere pravčaste plohe projektivno pridružene tangencijalnim ravninama plohe u tim točkama, t. j. ravninama sveska, kojemu je os ta izvodnica.[4] Vrtimo li prema tome pravac p u ravnini ϱ oko točke S, bit će

[3] Vidi radnju: Četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda i neki osobiti pramenovi tih krivulja. Rad, knj. 271.

[4] E. Müller-J. Krames: Cit. pod 1), str. 68.

svakom tom pravcu pridružen neki pravac s (vidi sprijeda), a svi će ti pravci s činiti izvodnice nekog stošca 2. reda s vrhom V, na kojemu će se nalaziti dvostruki pravac konoida kao i izvodnice i_1, i_2. Svi pravci s nastaju naime kao proizvod dvaju projektivnih svezaka ravnina, čije se osi i_1, i_2 sijeku u točki V.

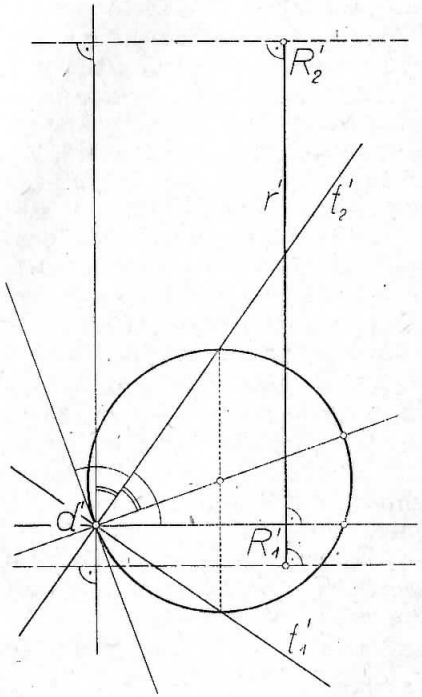
Prenesimo sada ta naša razmatranja na onaj slučaj, kada se pravac p nalazi u neizmjerno dalekoj ravnini para izotropnih izvodnica konoida. Točkom S, odnosno pramenom pravaca p u neizmjernosti, dano je u konačnosti ∞^1 svezaka paralelnih ravnina, koje su paralelne s jednim konačnim pravcem nosiocem neizmjerno daleke točke S. Presječne krivulje konoida s ravninama svakog ovog sveska, projicirane u smjeru dvostrukog pravca (t. j. iz neizmjerno daleke točke V) na jednu direkcionu ravninu, imat će, kao što smo vidjeli, zajednički četverostruki fokus. Svi takvi fokusi svih ∞^1 svezaka paralelnih ravnina ležat će na nekoj kružnici, koja prolazi projekcijom dvostrukog pravca. U prošlom odjeljku spomenuti stožac 2. reda pretvorio se naime ovdje u uspravan kružni valjak radi neizmjerno dalekog para izotropnih izvodnica i_1, i_2 i neizmjerno dalekog vrha V na dvostrukom pravcu konoida.

Poznato je, da se četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda može odrediti ovako:[5] dvostruka točka spoji se s tangencijalnim točkama neizmjerno daleke točke (te su spojnice među sobom okomite) i istom se točkom povuče okomica na asimptotu. Prebacimo li ovu okomicu oko jedne spomenute spojnice simetrično na suprotnu stranu i na taj pravac prenesemo od dvostruke točke pola udaljenosti tangenata krivulje usporednih s asimptotom na stranu vitice krivulje, dobit ćemo njezin četverostruki fokus.

Imamo li sada neki pravac r, koji probada torzalne ravnine našeg konoida u točkama R_1, R_2, a projekcije su mu u smjeru dvostrukog pravca d na naprijed spomenutu ravninu točke R'_1, R'_2 (vidi sliku), vidi se iz naprijed opisane konstrukcije četverostrukog fokusa, da će promjer kružnice svih spomenutih četverostrukih fokusa biti jednak polovini udaljenosti između točaka R'_1, R'_2. Pravci t'_1, t'_2 neka su projekcije torzalnih pravaca konoida. Uzmemo li pravcem r takvu ravninu, kojoj će tragovi u torzalnim ravninama konoida biti okomiti na projekciji toga pravca r, imat će projekcija presječne krivulje ove ravnine svoj četverostruki fokus najudaljeniji od projekcije dvostrukog pravca odnosno dvostruke točke te krivulje, jer je u tom slučaju najširi horizontalni razmak spomenutih tragova

[5] Vidi radnju cit. pod 3).

ravnine, koja prolazi pravcem r, a jednak je duljini $R'_1\ R'_2$. Spojnica je dakle, dvostruke točke s ovim četverostrukim fokusom promjer tražene kružnice. Na temelju spomenute konstrukcije četverostrukih fokusa, kao i poznatog pravilnog poretka izvodnica na Plückerovu konoidu, izlazi, da će se promjer, a prema tome i središte te kružnice, nalaziti na projekciji one



Sl. 1.

izvodnice konoida, koja se u dvostrukom pravcu sastaje s onom izvodnicom kojoj će projekcija biti paralelna s dužinom $R'_1\ R'_2$. Vidimo dakle, da za Plückerov konoid možemo izreći još ovakav stavak:

Projiciramo li usporedno s dvostrukim pravcem na jednu direkcionu ravninu presječne krivulje Plückerova konoida s ravninama usporednim s nekim pravcem r, ležat će četverostruki fokusi nastalih ∞^2 unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda u toj ravnini na jednoj kružnici, koja prolazi projekcijom dvostrukog pravca toga konoida. Polumjer te kružnice jednak je četvrtini udaljenosti projekcija obadvaju probodišta toga pravca s torzalnim ravninama, a središte joj se nalazi na projekciji one izvodnice, koja dvostruki pravac siječe u istoj točki kao i ona izvodnica, kojoj je projekcija usporedna s projekcijom spomenutog pravca.

Ako je α prikloni kut pravca r prema ravnini projekcija, a a duljina razmaka između torzalnih ravnina konoida, promjer je kružnice $d = \frac{1}{2} a \operatorname{cotg} \alpha$, jer je $2d = R'_1\ R'_2 = a \operatorname{cotg} \alpha$.

U okviru spomenute konstrukcije četverostrukog fokusa, kao i poznatih osobina Plückerova konoida, može se vrlo lako zapaziti činjenica, da je spomenuta kružnica svih četverostrukih fokusa projekcija one presječne elipse konoida, kojoj ravnina prolazi izvodnicom okomitom na pravcu r, a tangens njenog kuta nagiba prema ravnini projekcija dvostruko je veći od tangensa kuta priklona pravca r prema istoj ravnini. Ovo izlazi odatle, što je promjer spomenute kružnice jednak polovici duljine $R'_1\ R'_2$.

III. Zadamo li četverostruki fokus u ravnini projekcija unaprijed, tada je na temelju spomenute konstrukcije takva fokusa lako odrediti smještaj ravnina, kod kojih će projekcija njihovih presječnih krivulja u smjeru dvostrukog pravca imati zajednički upravo taj četverostruki fokus.

Zadamo li unaprijed čitavu našu kružnicu četverostrukih fokusa, tada ćemo smjer pravca r, s kojim su usporedne ravnine onih krivulja, kojih cirkularne projekcije imaju svoje četverostruke fokuse upravo na toj kružnici, odrediti na ovaj način: spojit ćemo sjecišta torzalnih pravaca s ravninom one elipse na konoidu, koja se projicira u zadanu kružnicu. Toj spojnici smanjit ćemo prikloni kut prema direkcionim ravninama tako, da joj tangens priklona bude polovina tangensa njenog vlastitog priklona. Tako dobiveni pravac, iz priklonice ravnine one elipse, daje traženi smjer.

IV. Uzmimo na nekom kosom kružnom valjku po volji neki ravninski presjek (elipsu) kao ravnalicu, a jednu izvodnicu toga valjka kao dvostruki pravac nekog konoida. Ravnine jednog sveska paralelnih ravnina kružnih presjeka toga valjka neka su ravnine parova izvodnica toga konoida, koje se sijeku (direkcione ravnine). Taj konoid bit će 3. reda s takvim parom imaginarnih neizmjerno dalekih izvodnica, koje prolaze sjecištima neizmjerno dalekog jednostrukog pravca toga konoida s apsolutnom čunjosječnicom.[6] Projekcije svih ravninskih pre-

[6] Ove imaginarne neizmjerno daleke izvodnice nisu izotropni pravci, jer ne diraju apsolutnu čunjosječnicu kao kod Plückerova konoida.

sjeka ovakvog konoida, u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, bit će unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda kao kod Plückerova konoida, jer sve prolaze apsolutnim točkama ravnine projekcija. Ovakve projekcije svih čunjosječnica toga konoida bit će prema tome i ovdje kružnice. Iz istih razloga kao kod Plückerova konoida (toč. I.) imat će i ovdje opisane projekcije paralelnih ravninskih presjeka zajednički četverostruki fokus. U ravnini projekcija imat ćemo prema tome posve istu sliku kao kod Plückerova konoida, t. j. projiciramo li na opisani način sve ravninske presjeke paralelne s nekim pravcem r, ležat će četverostruki fokusi tih projekcija na jednoj kružnici, kojoj ćemo promjer odrediti analogno kao kod Plückerova konoida. Prostorna razmatranja u vezi s ovom kružnicom bila bi kod ovog konoida identična s razmatranjima kod Plückerova konoida.

Probodimo sada pravcem r torzalne ravnine toga konoida, a duljinu omeđenu tim probodištima projicirajmo u smjeru dvostrukog pravca na jednu ovu torzalnu ravninu, koja neka bude ravnina projekcija. Udaljenost od te projekcije onog probodišta, koje smo projicirali označimo s a, a kutove, što ih pravac r i dvostruki pravac konoida čine s tom projekcijom označimo s α i β. Malo prije spomenuta projekcija duljine, omeđene probodištima pravca r s torzalnim ravninama, bit će jednaka a $(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta)$. Znamo još od Plückerova konoida, a na temelju poznate konstrukcije četverostrukog fokusa kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, da je opisana projekcija te duljine jednaka dvostrukom promjeru naše kružnice četverostrukih fokusa. Taj je promjer prema tome kod ovakvog konoida jednak $\frac{1}{2}a(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta)$. Kod Plückerova konoida je kut $\beta = 90^0$, dakle $\operatorname{cotg}\beta = 0$, odnosno $d = \frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\alpha$, kao što smo to tamo i spomenuli.

Uzmimo opet neki kosi ravninski presjek uspravnog ili kosog kružnog valjka kao ravnalicu konoida, kojemu je konačni dvostruki pravac usporedan s osi toga valjka, a ravnine su mu kružnih presjeka (kod kosoga valjka jedan svezak takovih ravnina) direkcione ravnine. Dobiveni konoid bit će 4. reda, kojemu u prvom slučaju neizmjerno daleke izvodnice čine par izotropnih pravaca, dok u drugom slučaju par neizmjerno dalekih imaginarnih izvodnica samo prolazi sjecištima neizmjerno dalekog dvostrukog pravca toga konoida s apsolutnom čunjosječnicom, tako da je te izvodnice ne dotiču. Projekcije ravninskih presjeka tih konoida u smjeru konačnog dvostrukog pravca na direkcione ravnine bit će i tu cirkularne krivulje, jer će i ovdje sve prolaziti apsolutnim točkama ravnine projekcija. Takve

projekcije presjeka s ravninama jednog sveska paralelnih ravnina bit će i ovdje konfokalne na isti način i iz istih razloga kao kod takvih konoida 3. reda. Uzmemo li konačno i ovdje sveske paralelnih ravnina paralelno s nekim pravcem r, bit će i tu na temelju razmatranja u točki II. ove radnje četverostruki fokusi presjeka toga konoida s tim ravninama, projiciranih u smjeru dvostrukog pravca na neku direkcionu ravninu, na nekoj kružnici. Ova kružnica prolazi sjecištem konačnog dvostrukog pravca s tom ravninom projekcija. Polumjer, kao i smještaj te kružnice u ravnini projekcija, ovisi o obliku ovakvih konoida, a konstruktivno može se ona odrediti spomoću poznate konstrukcije četverostrukog fokusa kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 4. reda s jednom neizmjerno dalekom dvostrukom točkom.[7]

Skupimo li sve ono, što smo našli zajedničko na svim do sada razmatranim konoidima, možemo to izreći ovim stavkom:

Svaki uspravan ili kosi konoid 3. ili 4. reda s neizmjerno dalekim imaginarnim parom izvodnica, koje prolaze sjecištima apsolutne čunjosječnice s jednostrukim odnosno dvostrukim neizmjerno dalekim pravcem toga konoida, odlikuje se ovakvim svojstvom: ravninski presjeci takvih konoida, projicirani u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, daju cirkularne krivulje. Uzmemo li sve ravninske presjeke tih konoida usporedne s nekim pravcem (njih ∞^2), četverostruki fokusi projekcija svih tih presjeka, projiciranih na spomenuti način, ležati će na jednoj kružnici.

V. Svaka presječna krivulja Plückerova konoida, projicirana u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, ima svoj četverostruki fokus. Ovaj je fokus projekcija neke točke u ravnini toga presjeka. Pogledat ćemo sada, gdje se u prostoru nalaze ovakve točke svih ravnina nekog pravca r. Iz prvog stavka u točki I. izlazi, da je geometrijsko mjesto ovakvih točaka na uspravnom kružnom valjku. Budući da ovo geometrijsko mjesto možemo smatrati proizvodom triju projektivnih svezaka ravnina (vidi točku II.), ono je prostorna krivulja 3. reda na uspravnom kružnom valjku, dakle *prostorna kubna kružnica.*

Potpuno isto vrijedi i za uspravan konoid 4. reda s izotropnim neizmjerno dalekim parom izvodnica. Kada bismo mjesto uspravnog konoida 3. ili 4. reda imali kosi takav konoid, kojega imaginarni neizmjerno daleki par izvodnica prolazi sjecištima

[7] Vidi radnju: O cirkularnim krivuljama 4. reda roda nultoga s neizmjerno dalekom dvostrukom točkom. Rad, knj. 271.

apsolutne čunjosječnice s neizmjerno dalekom ravnalicom toga konoida, dobili bismo analognim putem prostornu kubnu elipsu.

Znamo, da u svakom svesku paralelnih presjeka Plückerova konoida ima po jedna elipsa, jer po jedna ravnina svakog takvog sveska prolazi jednom izvodnicom toga konoida. Spomenute projekcije presječnih krivulja toga konoida, s ravninama takvog sveska, imaju, kao što znamo, zajednički četverostruki fokus. Budući da se ovdje radi o paralelnom projiciranju, taj je četverostruki fokus projekcija središta one jedine elipse u svesku takvih paralelnih presjeka. Odavle, kao i iz našeg prvog stavka, izlazi još i ovaj stavak:

Središta elipsa Plückerova konoida, kojih su ravnine usporedne s nekim pravcem, leže na jednoj kružnici u ravnini okomitog para izvodnica toga konoida.

Polumjer i središte te kružnice izvedeni su u točki II. ove radnje uz pretpostavku, da je ravnina okomitog para izvodnica ravnina projekcija. U ravnini okomitog para izvodnica leži ta kružnica zato, jer su u toj ravnini središta svih čunjosječnica toga konoida.

To vrijedi analogno i za kosi konoid 3. reda, kojemu neizmjerno daleki par imaginarnih izvodnica prolazi sjecištima apsolutne čunjosječnice s njegovom neizmjerno dalekom ravnalicom.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 22. VI. 1948.)

Dr. MIROSLAV KARŠULIN, ANTONIJA TOMIĆ i ANTE LAHODNY

STUDIJE O BOKSITIMA

I.

(Fizikalno-kemijska istraživanja strukture boksita)

Iskorišćivanje boksita predstavlja upravo tipičan primjer o potrebi poznavanja mineraloške i fizikalno-kemijske strukture rudnih sirovina, i to gotovo sve do najsuptilnijeg detalja, što jedino omogućuje ne samo ispravno odabiranje metode prerađivanja, već zahtijeva i shodno vođenje procesa u pojedinim fazama proizvodnje. No studijem strukture boksita postignuti podaci ne služe samo pri tehnološkom iskorišćivanju ove rude. Istraživanjima ovakve vrste stvara se gotovo redovno veoma vrijedan eksperimentalni materijal, koji dopušta stvaranje dalekosežnih zaključaka također s obzirom na načelna pitanja u vezi sa strukturom materije uopće, tako da studije ove vrste neminovno vode na područje problema čisto teoretske nauke.

Kako pak Jugoslavija raspolaže golemim količinama boksita, posvetili smo naročitu pažnju svestranom proučavanju ove rudne sirovine u prikazanom smislu. U nizu publikacija objavit ćemo rezultate naših studija boksita, koje su poduzete sa svrhom, da postignemo što dublji uvid u fizikalno-kemijsku strukturu te rude, te da time omogućimo njeno najracionalnije tehnološko iskorišćivanje.

Uvaživši tehnološko značenje poznavanja strukture ruda uopće, a napose boksita kao važne domaće sirovine naše industrije, objavit ćemo rezultate višegodišnjeg rada o strukturi boksita s raznih nalazišta u dinarskom sistemu. Kod toga je posve prirodno, da se ovaj rad oslanja na prva mineraloška i kemijska istraživanja jugoslavenskih boksita uopće, a to su radovi *M. Kišpatića* i *F. Tućana*, koji su počevši od godine 1905. posvetili naročitu pažnju proučavanju naših boksita. U velikoj mjeri pak služio nam je precizni istraživalački rad *F. Tućana*, koji se odnosi ne samo na sastav, već i na genezu krških boksita, te prema tome predstavlja važnu podlogu za naša istraživanja.

Na temelju istraživanja francuskih boksita dolazi već *A. Lacroix*[1] do zaključka, da boksit nije određen mineral, već da predstavlja smjesu minerala, dakle kamen. Tako i *F. Tućan*[2] izrijekom ističe, da boksit ide među kamenje, te nas se čudno doima, ako unatoč toj stotinama analiza utvrđenoj konstataciji i u novoj literaturi[3] nailazimo na označivanje boksita kao minerala, sastava $Al_2O_3 \cdot 2H_2O$. Eksperimentalno je nesumnjivo utvrđeno, da je boksit smjesa makrokristaličnih ili pak koloidno-disperznih kriptokristaliničnih minerala, i to aluminijskih hidroksida, kremične kiseline, alumosilikatnih hidrata, željeznog oksida i hidroksida, najzad titanova dioksida. Osim toga nalaze se u boksitima u manjoj količini još i spojevi kalcija i magnezija, vanadija, kroma, cirkona, mangana, fosfora i dr. Vrijednost boksita za tehnološku preradu u glinicu (Al_2O_3) određuje se po komercijalnim uzancama obično jednostavnom kemijskom analizom, i to određivanjem procentualnog sastava, što se tiče sadržaja na Al_2O_3, SiO_2, Fe_2O_3 i gubitka žarenjem (gubitak žarenjem = kemijski vezana voda). Zahtijevanje što većeg sadržaja rude s obzirom na Al_2O_3 kao i laka raščinljivost oksida sami su po sebi razumljivi. Maksimalno dopuštena količina kremične kiseline međutim određena je tehnološkom metodom raščinjavanja boksita. Dođe li raščinjavanje boksita mokrim putem pomoću natrijeve lužine, na pr. po K. F. Bayeru, utječe procenat kremične kiseline u boksitu u naročitoj mjeri na racionalnost procesa. Iznosi li sadržaj SiO_2 u boksitu više nego 5%, nastaju veliki gubici skupe natrijeve lužine, tako da proizvodnja glinice pomoću Bayerova procesa nije više ekonomična. Jasno je međutim, da reakcijom lužine s kremičnom kiselinom uvjetovani gubici ovise o tome, da li je kremična kiselina u boksitu u slobodnoj ili u vezanoj formi, a to dalje dovodi do pitanja o molekularnom stanju SiO_2 u boksitima. Spojevi silicija u boksitima nisu međutim samo od interesa za proces raščinjavanja te rude radi dobivanja glinice. Tako se na pr. u S. A. D. odavno upotrebljavaju boksiti s visokim procentom SiO_2 u proizvodnji sredstava za brušenje, kao i u keramičke svrhe, a naročito pak za proizvodnju visokovatrostalnog materijala (vatrostalni boksitni kamen).

U Jugoslaviji raspolažemo bogatim nalazištima boksita s niskim sadržajem kremične kiseline (do 4%), no poznato je[1], da postoje i goleme zalihe boksita s ekstremnim procentom

[1] A. Lacroix, Mineral. de la France, 3, 432, (1901).
[2] F. Tućan, Zentralbl. Mineral. etc., 16, 495 (1913).
[3] Jahrb. f. Keramik Glas, Email, str. 44 (1943).
[1] C. C. Fox, Bauxite and Aluminous Laterite, London 1932.

SiO_2. Mogućnost upotrebe ovakvih boksita za svrhe keramičke industrije, kao i činjenica, da ne raspolažemo glinama podesnim za finu keramiku, nužno nas vode do studija molekularne strukture kremične kiseline u boksitima, a to naročito boksita s visokim procentom SiO_2.

Rezultati naših studija o strukturi boksita odnose se prema gore rečenom na ove sisteme:

1. $Al_2O_3 — H_2O$, 2. $SiO_2 — H_2O$, 3. $Al_2O_3 — SiO_2 — H_2O$ i 4. $Fe_2O_3 — H_2O$.

U ovom radu izvjestit ćemo o istraživanjima sistema $Al_2O_3 — SiO_2 — H_2O$, koji je ne samo zanimljiv s obzirom na njegovu genezu u boksitima, nego je i od naročite tehničke važnosti u vezi keramičkih svojstava boksita.

Sistem $Al_2O_3 — SiO_2 — H_2O$ u boksitima

F. Tućanova[1] rasprava o mineralnom i kemijskom poznavanju ličkih boksita bila je polazna točka u našim eksperimentalnim istraživanjima sistema alumosilikatnih hidrata u boksitima. U ovoj raspravi autor objavljuje niz kemijskih analiza boksita s visokim procentom kremične kiseline, te na temelju tih analiza, kao i mikroskopskih i rentgenografskih istraživanja, postavlja virtualni mineralni sastav istraženih uzoraka boksita. U vezi naših istraživanja naročito su značajne analize dvaju uzoraka ličkih boksita, i to:

1. Analiza rude s boksitnog ležišta na Skočaju[1]:

Al_2O_3	... 39,21%	TiO_2	..... 1,09%	CaO	.... 0,75%
SiO_2	... 44,00%	Fe_2O_3	..... 0,03%	MgO	.... 0,08%
H_2O^+	... 13,90%	BaO	..... 0,06%	P_2O_5	.... tragovi
		H_2O^-	..... 1,20%		

Isporedivši sastav ove rude s analizom čistog kaolinita $Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O$ ($Al_2O_3 = 39{,}56\%$, $SiO_2 = 46{,}50\%$, $H_2O = 13{,}94\%$), F. Tućan dolazi do zaključka, da uzorak rude sa Skočaja predstavlja kaolinit, što potvrđuje uostalom i rentgenografska[2] analiza rude.

[1] F. Tućan, Rad jugosl. akad., 249, 46 (1934).
[1] U početku godine 1947. imao sam priliku da zajedng s prof. F. Tućanom i doc. M. Tajderom posjetim nalazište boksita na Skočaju i da ponesem oveću količinu bijelog »boksita« u svrhu strukturne analize.
[2] W. F. de Young u Delftu istraživao je rentgenografski ličke boksite, koje mu je dostavio F. Tućan (vidi: Rad Jugosl. Akad. 249, 46 (1934).

2. Analiza boksita iz Mazina:

Al_2O_3	43,73 %	ZrO_2	0,05%
SiO_2	34,13 %	Cr_2O_3	tragovi
Fe_2O_3	11,87 %	MnO	0,03%
H_2O^+	8,17 %	CaO	0,69%
TiO_2	1,35 %	MgO	0,15%
V_2O_5	0,038%	H_2O^-	0,29%

Na temelju ove kemijske analize i rezultata mikroskopskog istraživanja mazinskog boksita F. T u ć a n dolazi do zaključka, da se u ovoj rudi nalazi alumosilikatni mineral pirofilit, kako to izlazi iz navedenog virtualnog sastava:

Hidrargilit ($Al_2O_3 \cdot 3H_2O$)	2,03%
dijaspor ($Al_2O_3 \cdot H_2O$)	32,86%
pirofilit ($Al_2O_3 \cdot 4SiO_2 \cdot H_2O$) ...	51,16%
Fe_2O_3 : :	11,87%
ZrO_2 : :	0,05%
TiO_2 : :	1,35%

Ovaj nalaz pirofilita u boksitnoj rudi zanimljiv je ne samo zato, što predstavlja prvi nalaz tog minerala u boksitima, već i zbog njegove važnosti s obzirom na genezu alumosilikata u boksitima Krša.

Na temelju ovih nalaza alumosilikatnih hidrata u boksitima i u smislu ovdje iznesene naučne kao i tehnološke problematike poduzeli smo pokuse, da bismo riješili ova pitanja:

1. Koje eksperimentalne metode omogućuju prepoznavanje i određivanje alumosilikatnih hidrata, u prvom redu kaolinita, u boksitima.

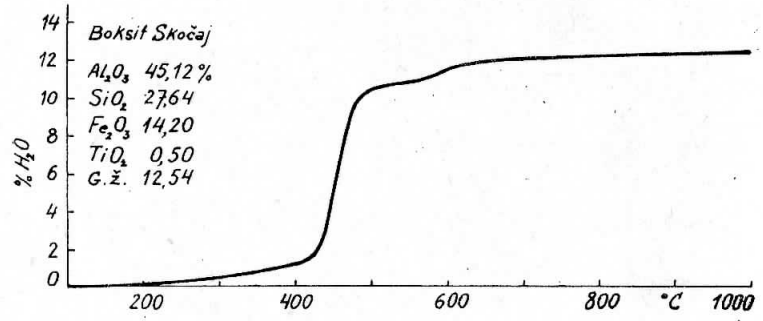
2. O kojima fizikalno-kemijskim parametrima zavisi nastajanje kaolinita i pirofilita u boksitima.

3. Kako se kaoliniti s boksitnih ležišta, odnosno kaolinitni boksiti vladaju u termičkom pogledu, naročito kod temperatura iznad 1000° C, dakle u području mulitne faze ($3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$), koja odlučuje stvaranje keramičkog crijepa.

Radi eksperimentalnog određivanja kaolinita i pirofilita u boksitima primijenili smo metodu određivanja odvodnjavanja u ovisnosti o temperaturi žarenja, diferencijalno termičku analizu i rentgenografsku analizu po Debye-Scherreru.

I. a. Termička dehidratacija boksita

Proces termičke dehidratacije boksita pratili smo određujući gubitak žarenjem (= hidratna voda) usitnjenih i kod 105° C sušenih uzoraka rude, i to u području temperatura između 200° i 1100° C. Točno odvagnuti uzorci rude (ukupne težine oko 1 gr) ostavljeni su 2 do 3 sata kod stalne temperature, a zatim je određen gubitak žarenjem. Zasebnim pokusima određen je za svaku temperaturu period vremena žarenjem, u kojem se uspostavlja konstantan gubitak težine. Sl. 1. prikazuje tok krivulja gubitka žarenjem (u % gubitka H_2O, na ordinatama) u ovisnosti o temperaturi (° C, na apscisi), i to uzorka crvenog boksita sa Skočaja. Tok krivulje je tipičan za sve boksite s

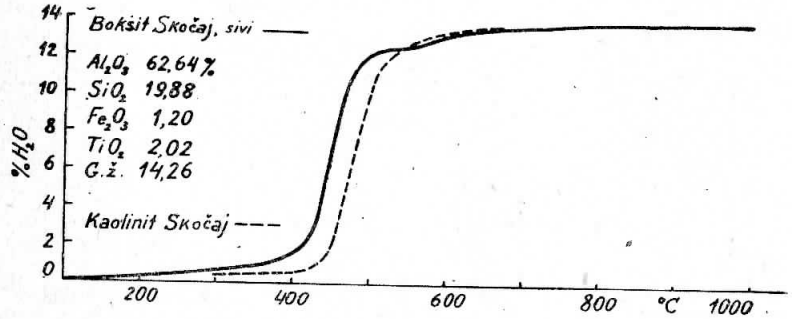


Sl. 1.

visokim sadržajem kremične kiseline. Prvi strmi uspon krivulje, što dolazi između 400° i 500° C, odnosi se na gubitak jednog mola vode, koji u tom području temperature otpušta molekula $Al_2O_3 \cdot H_2O$ (monohidrat). Da li se pri tome radi o dehidrataciji γ — $Al_2O_3 \cdot H_2O$ (bemit) ili o α — $Al_2O_3 \cdot H_2O$ (diaspor), to se iz toka krivulja ne da zaključiti, što je razumljivo, ako uočimo malu razliku, koja postoji u čvrstoći veza vode između diaspora i bemita[1]. Druga, mnogo slabije izražena stepenica dehidratacione krivulje nalazi se između 550° i 650° C i indicira gubitak dviju molekula vode iz kaolinita, $Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$ $2H_2O$. Čini se prema tome, da bi se iz dehidratacionih krivulja relativno lako dao odrediti procenat aluminijeva hidroksida i kaolinita u boksitima, i to jednostavnim mje-

[1] H. S c h w i e r s c h, Chemie d. Erde 8 (1933) 252. G. F. H ü t t i g i E. v. W i t t g e n s t e i n, Z. anorg. allg. Chem. 171 (1928) 323.

renjem visina pojedinih stepenica krivulja, kojima je određena količina vode u $Al_2O_3 \cdot H_2O$, odnosno u $Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O$, a time i količine ovih minerala u boksitima. Ovako jednostavno kvantitativno određivanje aluminijeva monohidrata i kaolinita u boksitima ipak nije u svakom slučaju moguće, naročito ako se radi o boksitima s visokim sadržajem kremične kiseline. To jasno proizlazi iz sl. 2., koja prikazuje tok krivulje odvodnjavanja uzorka sivog boksita sa Skočaja kao i dehidratacionu krivulju uzorka kaolinita sa Skočaja, koja je na grafu označena crtkanom linijom. Iz toka krivulje kaolinita razabiramo, da njen strmi uspon pada u područje između 450° i 600° C, te da se dakle krivulje odvodnjavanja monohidrata i kaolinita pokrivaju. Odatle izlazi da je stepenica krivulje, koja indicira

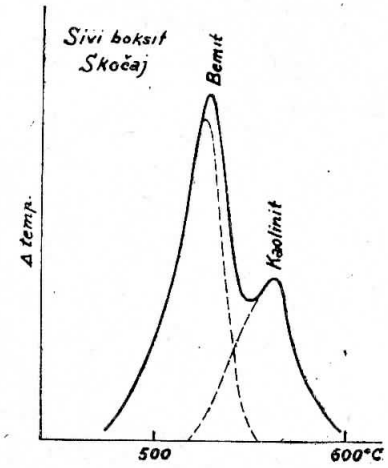


Sl. 2.

dehidrataciju aluminijeva monohidrata, nastala sumiranjem gubitka vode i monohidrata i kaolinita. Sastoji li se na pr. uzorak boksita iz veoma malo Al-monohidrata i mnogo kaolinita, rezultirat će krivulja, koja više ne pokazuje stepenice, već zbog slijevanja krivulja monohidrata i kaolinita dobiva kontinuiran tok. Prema tome omogućuje metoda obične termičke analize kvalitativno prepoznavanje kaolinita u boksitima, koji ne sadržavaju ekstremno visok procenat kremične kiseline, a tek ako je količina kremične kiseline razmjerno mala, t. j. ispod ca. 6%, ovaj način analize dopušta i kvantitativno određivanje aluminijeva monohidrata i kaolinita. Da bismo sigurno odredili kaolinit u boksitima i kod visokog sadržaja kremične kiseline, morali smo upotrebiti metodu, koja omogućuje točnije određivanje temperature, kada nastaje endotermni efekt dehidratacije. Kao najpodesnija metoda dolazi ovdje u račun diferencijalno-termička analiza.

I. b. Diferencijalno-termička analiza boksita

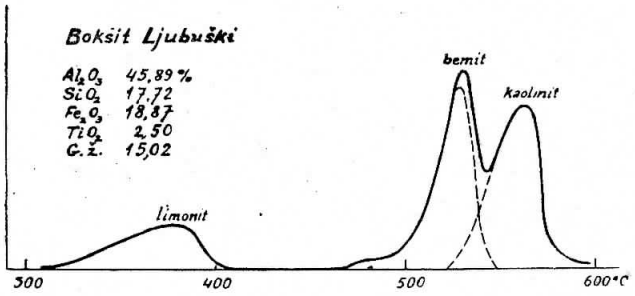
Tom metodom termičke analize određuju se temperaturne razlike, koje nastaju zbog grijanja između istraživane materije (na pr. hidroksida) i jedne u termičkom pogledu inertne supstancije (standard), koja dakle bez kemijskih i strukturnih promjena dobiva temperature, što vladaju u peći. Kod naših pokusa upotrebili smo kao standard α — Al_2O_3 (korund), te prema tome diferencijalni termočlanak: Pt, Rh—Pt—Pt, Rh pokazuje razlike temperature između uzorka rude i standard supstancije u područjima temperature peći, u kojima dolazi do endoterm-



Sl. 3.

nog procesa dehidratacije komponenata boksita, t. j. minerala sistema Al_2O_3 — H_2O, Al_2O_3 — SiO_2 — H_2O i Fe_2O_3 — H_2O. U grafičkim prikazima sve su razlike temperature nanesene na ordinatama, dok su temperature peći, kojima odgovaraju te razlike, nanesene na apscisi. Slika 3. prikazuje tok diferencijalno-termičke krivulje dehidratacije sivog boksita sa Skočaja. Krivulja pokazuje dva maksimuma, i to jedan kod 528° C, koji odgovara gubitku vode Al-monohidrata, dok drugi maksimum kod 625° C nastaje zbog gubitka dvaju mola vode iz kaolinitne molekule. Iz toka krivulje lako se razabira, da je dio krivulje, koji spaja maksimume, nastao adicijom pojedinačnih krivulja, t. j. monohidratne i kaolinitne, kojima je tok skiciran crtkanim linijama. Slika 4. prikazuje tok diferencijalno-

termičke krivulje odvodnjavanja boksita iz okoline Ljubuškog; ta je krivulja, apstrahirajući od dijela, koji se odnosi na dehidrataciju limonita, posve analogna krivulji, što smo je dobili analizom boksita sa Skočaja. Kod ekstrapoliranja toka krivulja, koje se odnose na aluminijev monohidrat odnosno na kaolinit, postupili smo tako, da smo ponajprije upotpunili tok diferencijalno-termičke krivulje kaolinita, i to prema krivuljama, koje smo dobili diferencijalno-termičkom analizom uzorka čistog kaolinita. Odbivši od eksperimentalno dobivene sumarne krivulje za kaolinitnu komponentu ekstrapoliranu krivulju, postigli smo tok bemitne komponentne. Iz toga međutim proizlazi, da je položaj pravog maksimuma bemitne komponente pomaknut prema nešto nižim temperaturama, negoli je to kod maksimuma aditivne krivulje. No osim ovog posve na geome-



Sl. 4.

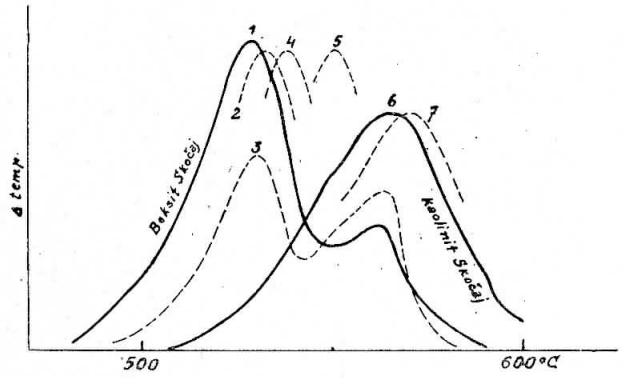
trijskim razlozima osnovanog pomaka položaja maksimuma dehidratacije aluminijeva monohidrata došli smo u našim istraživanjima do zaključka, da postoje još neki faktori, koji utječu na položaj maksimuma dehidratacije. Razmjer ovih pomaka proizlazi iz slike 5., na kojoj je zabilježen niz diferencijalno-termičkih krivulja, i to za:

1. sivi boksit sa Skočaja,
2. boksit iz Stolca,
3. boksit iz Ljubuškog,
4. monohidratni maksimum boksita iz Drniša,
5. maksimum sintetskog monohidrata (bemita),
6. kaolinit sa Skočaja i
7. kaolinit iz Moravske (maksimum).

Široko područje varijacije položaja maksimuma pokazuje dakle to, da položaj maksimuma odvodnjavanja smjese aluminijskog monohidrata i kaolinita ne zavisi od isključivo aditivnih

razloga, već da na nj moraju djelovati još i drugi faktori. Radi se po svoj prilici o takvim faktorima, koji se odnose na strukture kristalnih rešetki pojedinih komponenata i na njima uvjetovanom izmjeničnom i međusobnom djelovanju sila. Te sile utječu na čvrstoću veza hidroksilnih grupa u molekulama aluminijskog monohidrata i kaolinita, što se ispoljuje kod dehidratacije nižom odnosno višom temperaturom, kod koje dolazi razgrađivanje rešetki ovih molekula.

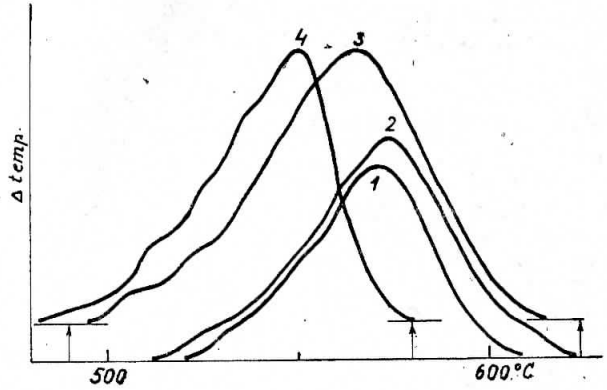
Procesi, koji se zbivaju pri termičkoj dehidrataciji spojeva, što pripadaju sistemima Al_2O_3—H_2O i Al_2O_3—SiO_2—H_2O, bili su zbog teoretske kao i praktične važnosti ovih sistema veoma



Sl. 5.

često predmet brižljivih istraživanja. Iz opsežne literature, koja se odnosi na ta istraživanja, dade se međutim razabrati, da se podaci raznih autora često razilaze, i to naročito, što se tiče temperature, pri kojoj dolazi maksimalna dehidratacija istraženih sistema. To razilaženje ide i tako daleko, da neki autori drže, da molekuli kaolinita pripada formula $Al_2O_3 \cdot SiO_2 \cdot 1^1/_2H_2O$, umjesto uobičajene formulacije sa 2 mola H_2O. Mišljenja smo, da su sva razilaženja o strukturi spomenutih sistema uzrokovana činjenicom, da se pri termičkoj dehidrataciji ovih sistema ne uspostavlja prava termodinamska ravnoteža. Ta činjenica postaje jasna, ako uočimo strukturne razlike, koje postoje između kaolinita, dikita i nakrita. Ova tri minerala posjeduju identični stehiometrički sastav $Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O$, no razlikuju se bitno, što se tiče temperature dehidratacije. Uzrok toj razlici moramo tražiti u različitoj konfiguraciji kristalne rešetke, i to naročito s obzirom na simetriju poređaja iona u smjeru

osi c. Kako pak ova simetrija ovisi o uslovima geneze dotičnog sistema, mora po tome čvrstoća OH-veza u spojevima sistema Al_2O_3 — SiO_2 — H_2O biti ovisna o genetskim prilikama. Da bismo provjerili ispravnost toga našeg naziranja, učinili smo niz pokusa, kod kojih smo promjenom termodinamskih parametara, i to pritiska i temperature, na sistem Al_2O_3 — SiO_2 — H_2O, htjeli utjecati na čvrstoću OH-veza, dakle i na položaj maksimuma dehidratacije.



Sl. 6.

Slika 6. prikazuje rezultate pokusa kod uzorka kaolinita iz Moravske[1], a usporedno nanesene su i diferencijalno-termičke analize kaolinita s boksitnih ležišta na Skočaju (Lika) i kaolinita s boksitnog nalazišta kod Careva Mosta (N. R. Crna Gora). Kemijska analiza tih kaolinita dala je ovaj sastav:

Kaolin (Moravska)		Kaolinit (Skočaj)		Kaolinit (Carev Most)	
Al_2O_3	—	Al_2O_3	38,36%	Al_2O_3	39,58%
SiO_2	46,84%	SiO_2	44,50%	SiO_2	43,48%
Fe_2O_3	—	Fe_2O_3	1,59%	Fe_2O_3	0,09%
G. ž.	—	G. ž.	14,30%	G. ž.	13,30%
		TiO_2	1,25%	TiO_2	1,50%
				CaO	1,88%
				MgO	0,37%

[1] Rezultati pokusa kod sistema Al_2O_3—H_2O potvrdili su također našu pretpostavku. O ovim pokusima izvijestit ćemo u posebnom saopćenju.

Kako iz šeste slike razabiramo, diferencijalno-termička analiza uzorka kaolina iz Moravske daje tok dehidratacije, kako ga prikazuje krivulja 1, s maksimumom kod ca. 570° C. Krivulja 2 snimljena je također s kaolinom iz Moravske, no sada, pošto je bio izložen hidrotermalnim prilikama. U tu svrhu stavljeno je 1,5 gr kaolina i 8 ml dest. H_2O u čeličnu bombu (Styria-specijal čelik), koja ima zapreminu od 37,5 ml. Hermetski zatvorena bomba ugrijana je na 350° C, što odgovara pritisku od 168 atm., i ostavljena je na toj temperaturi $8^1/_2$ sati. Nakon ohlađenja bombe izvadili smo preparat, sušili ga kod 105° C i izveli diferencijalno-termičku analizu. Rezultat te analize prikazan je na slici 6. krivuljom 2, kojoj je maksimum kod 575° C. Ispoređujući krivulje 1 i 2 vidimo, da, pošto je kaolin bio podvrgnut hidrotermalnim prilikama (350° C, 160 atm.), nastaje jasan pomak diferencijalno-termičke krivulje, t. j. dehidratacija kod ovog preparata nastaje kod više temperature negoli kod kaolina, koji je bio analiziran u dostavnom stanju. Sam pomak maksimuma iznosi doduše tek ca. 5° C, ali pomak silazne grane krivulje kod hidrotermalnog preparata jasno pokazuje realnost takvog pomaka.

Ovim pokusom dokazali smo, da položaj maksimuma dehidratacije različitih kaolinita može varirati i da ove varijacije ovise o prilikama, kojima je mineral bio izložen. Krivulje 3 i 4 prikazuju tok i maksimume diferencijalno-termičkih krivulja uzoraka sa Skočaja (3) i sa Careva Mosta (4). Iz termičkih analiza ovih preparata proizlazi, da temperature maksimalne dehidratacije mogu varirati u prilično širokim granicama, koje prema našim dosadašnjim mjerenjima obuhvaćaju područje između 550° do 575° C.

Pošlo nam je za rukom polučiti analogne pomake maksimuma diferencijalno-termičkih krivulja i na preparatima sintetskog bemita (γ — $Al_2O_3 \cdot H_2O$), bemitnih boksita kao i kaolitnih boksita, i to također stavljanjem ovih preparata pod hidrotermalne uslove. O rezultatima ovih pokusa referirat ćemo u nastavku rada, koji se odnosi na istraživanja sistema Al_2O_3 — H_2O u boksitima. Moramo međutim već i ovdje istaknuti, da hidrotermalni parametri, kojima raspolažemo u laboratoriju nisu jedini faktori, koji utječu na oblik i maksimum dehidratacionih krivulja. To vrijedi naročito za vremensku koordinatu, koja kod zbivanja u prirodi dobiva dominantan značaj i koja stoga može da potisne utjecaj temperature i pritiska, bilo već u stadiju izgradnje ili kasnije s obzirom na stabilitet već izgrađenih kristalnih rešetki.

U vezi primjene diferencijalno- termičke analize kod studija strukture boksita možemo resimirajući kazati, da ova metoda omogućuje jednostavno i sigurno kvalitativno određivanje bemita i kaolinita u boksitima. Štoviše, diferencijalno-termičkom analizom možemo zaključiti i o stabilitetu ovih komponenata boksita. Ovi se zaključci dadu verificirati i drugim fizikalno-kemijskim metodama istraživanja, kao što su na pr. reakcije pod hidrotermalnim uvjetima i rentgenografska strukturna analiza. Dalji pokusi u smislu kvantitativnog određivanja aluminijskog monohidrata i kaolinita u boksitima pomoću diferencijalno-termičke analize već se vrše.

I. c. Rentgenografska analiza boksita

Radi provjeravanja ovdje iznesenih rezultata termičke kao i diferencijalno-termičke analize istražili smo boksite rentgenografski po Debye-Scherrerovoj metodi (rentgenskim spektrografom stavljenim susretljivo na raspolaganje po prof. Šahnazorovu, predstojniku Zavoda za mehan. tehnologiju Tehničkog fakulteta u Zagrebu). Kod određivanja strukture preparata upotrebili smo kobaltovu cijev, a monohromaziju postigli smo filtrom iz aluminija. Usitnjeni preparati stavljeni su u cjevčice od specijalnog stakla, koje su bile montirane u Debye-Scherrerovoj kameri promjera 5,7 cm. Napetost je iznosila ca. 39 kV, struja 20 mA, a vrijeme ekspozicije 100 do 160 minuta. Spektre smo snimili na Dupont-filmu i zatim razvijali u specijalnom rentgen-razvijaču.

Snimili smo ove preparate: 1. sintetski bemit, dobiven grijanjem aluminijeva hidroksida (Merck) u autoklavu (200° C, 15 atm., 4 sata), 2. kaolin (Schering), 3. kaolinit s boksitnog ležišta kod Vel. Skočaja i 4. uzorak bijelog boksita s Bijelih Poljana (N. R. Crna Gora).

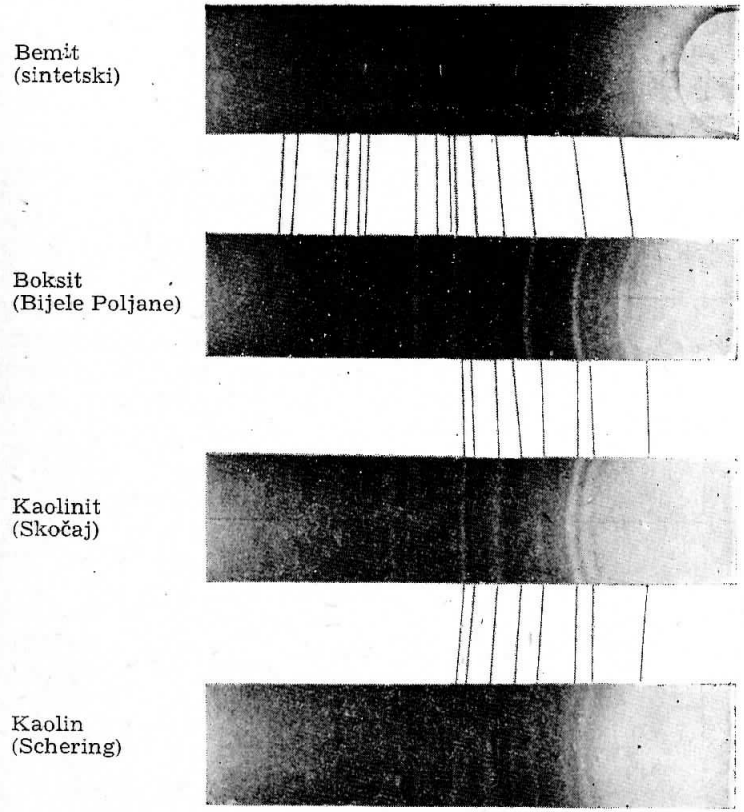
Kemijska analiza bijelog boksita s Bijelih Poljana dala je ove rezultate:

Al_2O_3	60,13%
SiO_2	20,36%
Fe_2O_3	2,07%
TiO_2	3,00%
G. ž.	14,66%

Diferencijalnom termičkom analizom ustanovljeno je nadalje, da ovaj uzorak boksita sastoji iz bemita i kaolinita te da mu je prema tome mineralni sastav:

bemit	50,38%
kaolinit	43,76%
$Fe_2O_3 \cdot 1{,}5H_2O$	3,08%
TiO_2	3,00%

Iz sl. 7. razabira se identitet rentgenskih spektrograma skočajskog »bijelog« boksita i Scheringova kaolina, te je prema tome potvrđen nalaz kemijske i diferencijalno-termičke analize, da se kod rude sa Skočaja radi o čistom kaolinitu.



Sl. 7.

Nadalje vidimo na sl. 7., da se rentgenogram bijelog boksita s Bijelih Poljana sastoji iz interferencija koje pripadaju kaolinitu i bemitu, a time je također potvrđen nalaz diferencijalno-termičke analize, po kojoj je ovaj boksit smjesa ovih minerala.

Zaključak

1. Termičkom, diferencijalno-termičkom kao i rentgenografskom analizom boksita pošlo nam je za rukom eksperimentalnim putem odrediti molekularni vez kremične kiseline u boksitima.

2. Naprijed navedenim metodama utvrđeno je, da kremična kiselina u boksitima dolazi vezana i u obliku hidratiziranih alumosilikata.

3. Na temelju podataka fizikalno-kemijske strukturne analize kao i na temelju rezultata kemijske analize boksita omogućeno je izračunavanje procenata bemita i kaolinita u boksitima.

4. Termičkom i diferencijalno-termičkom analizom bijelih boksita iz Like i Crne Gore ustanovljeno je, da se ovi boksiti sastoje iz bemita i kaolinita.

5. Ovaj nalaz potvrđen je određivanjem strukture boksita rentgenografskim putem, i to metodom po Debyeu i Scherreru.

6. Podaci diferencijalno-termičke analize, t. j. pomaci dehidratacionih maksimuma kaolinita, i to bilo čistog ili sadržanog u boksitima, zatim utjecaj hidrotermalnih parametara na položaj ovih maksimuma, pokazali su potrebu studija o procesu stvaranja kaolinita u boksitima.

7. U narednoj publikaciji objavit će se rezultati studija geneze kaolinita u domaćim boksitima. Ona je važna s obzirom na molekularno stanje komponenata, koje sačinjavaju rudu, a to stanje u velikoj mjeri utječe na smjer i racionalnost tehnološkog prerađivanja boksita.

Istraživanja o strukturi domaćih boksita izvršena su u Zavodu za fizikalnu kemiju Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, a u suradnji s Institutom za industrijska istraživanja Ministarstva industrije N. R. Hrvatske i Centrale za istraživanje boksita i aluminija, koja radi u sklopu Instituta.

Mnoga od navedenih mjerenja omogućena su samo time, što mi je Institut za industrijska istraživanja dodijelio suradnike ing. A. Lahodnog, ing. T. Tomićevu, ing. A. Metlenka i I. Schneidera i što je potpomagao rad aparaturom i kemikalijama.

Zagreb, dne 22. VI. 1948.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 18. IX. 1948.

Dr. HRVOJE IVEKOVIĆ i Dr. SMILJKO AŠPERGER

KONDUKTOMETRIJSKO ODREĐIVANJE UGLJIČNOG DIOKSIDA

(Iz Zavoda za opću, anorgansku i analitičku kemiju Farmaceutskog fakulteta, Zagreb)

I. Mjerenje kod konstantne temperature

Promjena električne vodljivosti razrijeđenih lužina, uzrokovana apsorpcijom ugljičnog dioksida, upotrebljava se kao metoda za kvantitativno određivanje tog plina kao i kod analize karbonata i svih onih tvari, koje pod izvjesnim uvjetima mogu razvijati ugljični dioksid. Kad se kao apsorpciono sredstvo uzima natrijeva ili kalijeva lužina, uvođenjem ugljičnog dioksida vodljivost se smanjuje, jer je vodljivost otopine karbonata približno za polovicu manja od vodljivosti otopine hidroksida iste koncentracije[1]. Kad se kao apsorpciona tekućina uzima otopina barijeva hidroksida, nastali barijev karbonat praktički ne sudjeluje u vodljivosti, te je efekt promjene vodljivosti znatno veći.

Mnogi autori[2], koji su nastojali razraditi ovu posljednju metodu, primijenivši je i za određivanje veoma malenih koli-

[1] M. D. Thomas, Ind. Engin. Chem. (Anal. Ed.) **4.** 253. (1932).

[2] J. R. Cain, L. C. Maxwell, Journ. Ind. Eng. Chem. **11.** 852. (1919). — H. A. Spoehr, H. Mc. Gree, Journ. Ind. Eng. Chem. **16.** 128. (1924). — A. C. Raymond, H. M. Winegarden, Journ. biol. Chem. **74.** 189. (1927) . — L. E. Bayliss, Bioch. Journ. **21.** 662. (1927). — W. O. Fenn, Proc. of the soc. f. exp. biol. and med. **23.** 714. (1926); Ber. ges. Physiol. **38.** 636. — K. Gordon, J. F. Lehmann, Journ. scient. Instruments **5.** 123. — A. P. Matwejew, J. B. Pronin, O. I. Frost, Žurnal prikladnoi himii, **3.** 1223. (1930). — J. Derks, Arch. Hyg. Bakteriol. **110.** 329. (1933). — W. D. Treadwell, Th. Zürrer, Helv. chim. Acta **17.** 869. (1934). — A. S. Smith, Ind. Eng. Chem. Analyt. Edit. **6.** 293 (1934). — S. Hatta, M. Katori, J. Soc. Chem. Ind., Japan **37.** 278. (1934). — K. W. Gorbatschew, Himičeski Žurnal. Ser. B. Žurnal prikladnoi himii **8.** 1508. (1935). — R. G. Newton, Ann. Botany **49.** 381. (1935). — J. G. Waugh, Ind. Eng. Chem.; Analyt. Edit. **9.** 96. (1937). — A. Lassieur, C. R. hebd. Séances Acad. Sci. **206.** 606. (1938). — T. Krasso, Techn. Kurir **9.** 63. (1938). — D. G. Clark, J. Shaperjr, O. F. Curtis, Plant. Physiol. **16.** 643. (1941).

čina ugljičnog dioksida (R. G. Newton i dr.), našli su ponajprije pogodne koncentracije apsorpcionih sredstava. Zatim su tabelarno ili grafički prikazivali, kako se smanjuje vodljivost apsorpcione otopine određene koncentracije nakon apsorpcije poznate količine ugljičnog dioksida. Iz tako dobivenih podataka mogli su retrogradno odrediti nepoznatu količinu ugljičnog dioksida mjerenjem promjene vodljivosti iste apsorpcione otopine.

Koncentracija apsorpcione tekućine ne smije biti suviše velika, jer se u tom slučaju dobiva premalena promjena vodljivosti. S druge strane apsorpcione otopine malih koncentracija ne mogu kvantitativno apsorbirati ugljični dioksid, pa su stoga neki autori konstruirali komplicirane ćelije za apsorpciju. Štoviše neki primjenjuju cirkulaciju ugljičnog dioksida kroz apsorpcionu tekućinu.

Krivulje baždarenja, koje su autori dobili uz pomoć poznate količine ugljičnog dioksida, prikazivale su zavisnost izmjerenog otpora (odnosno vodljivosti) apsorpcione otopine od apsorbirane količine ugljičnog dioksida. Tako dobivene krivulje baždarenja specifične su za apsorpcionu tekućinu određene koncentracije, i zato je potrebno, da se kod ovakvih konduktometrijskih analiza prirede apsorpcione otopine one kve koncentracije, s kakvom je vršeno baždarenje. Međutim kod barijeva hidroksida, koji je za ugljični dioksid najzgodnije apsorpciono sredstvo, upravo to predstavlja izvjesnu poteškoću.

Da toj poteškoći izbjegne, A. Lassieur je apsorpcione otopine, pomoću kojih je izvršio baždarenje, konzervirao u ampulama i s takvim je otopinama vršio konduktometrijsku analizu, dok je W. D. Treadwel nastojao naći općeniti matematski izraz za zavisnost količine ugljičnog dioksida od izmjerene vodljivosti. Treadwelov izraz može se dobro primijeniti samo za koncentracione uvjete krivulje baždarenja, a za druga koncentraciona područja potrebno je ipak izvršiti nova empirijska baždarenja.

Sirôzi Hatta i Matuwaka Katori određivali su otopljeni ugljični dioksid u vodi, i to iz razlike promjene vodljivosti barijeva hidroksida dodanog vodi, koja sadržava ugljični dioksid, i u onoj, iz koje je ugljični dioksid istjeran kuhanjem. Traženi CO_2 određuje se iz koncentracija barijeva hidroksida nakon taloženja barijeva karbonata, a te se koncentracije određuju iz vodljivosti otopine prema izvedenoj eksponencijalnoj jednadžbi. Pored toga rezultati su samo približno točni.

Naše nastojanje išlo je za tim, da se nađe opći izraz za primjenu ove metode, kako bi se omogućila njena upotreba i za kontinuirana određivanja ugljičnog dioksida, koji se oslobađa iz nekog reakcionog sistema, t. j. išlo se za tim, da se omogući brzo, jednostavno i kontinuirano mjerenje oslobođenih količina ovog plina kao funkcije reakcionog vremena, a nezavisno od koncentracije apsorpcione otopine. Istraživanja koja smo u tom pravcu izvršili, pokazala su, da se količina ugljičnog dioksida može odrediti računski, i to na temelju mjerenja promjene vodljivosti otopine barijeva hidroksida, bez obzira na njenu početnu koncentraciju, koja može varirati u velikom koncentracionom intervalu, već prema količini ugljičnog dioksida, koji se očekuje.

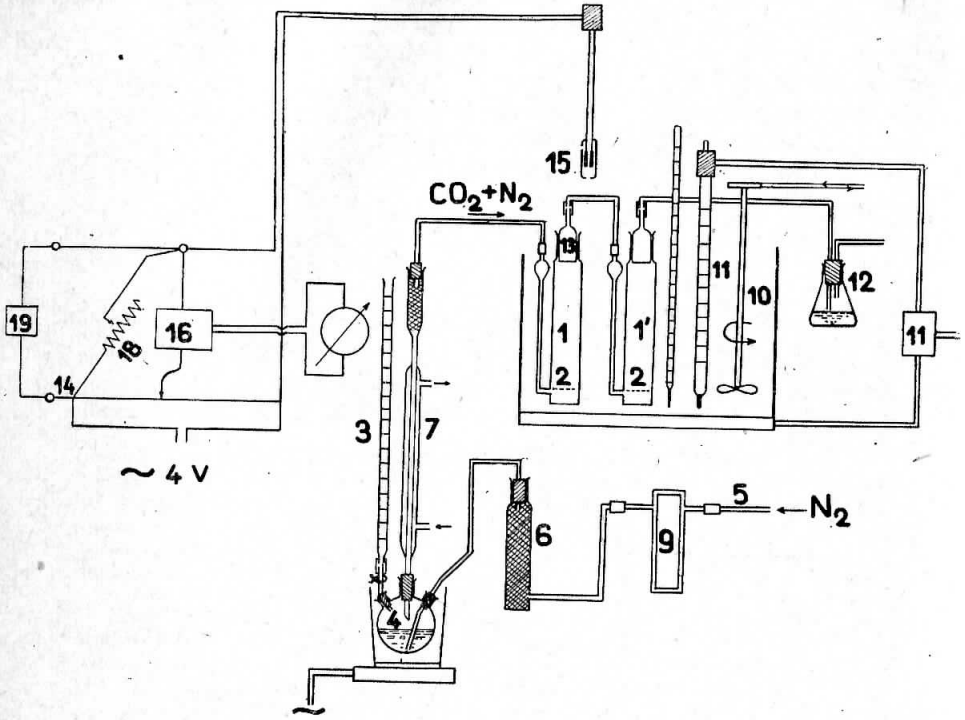
1. Opis aparature

Mjerenja su izvršena aparaturom, koja je shematski prikazana na slici 1. Kao apsorpciona posuda služio je apsorpcioni toranj *1* tvrtke Schott-Gen.-Jena od 600 ccm, visine 20 cm, s ugrađenim staklenim G1-filtrom *2* za raspršivanje plina. Apsorpcioni toranj napunjen je sa 500 ccm otopine barijeva hidroksida, što daje visinu stupca od 18 cm.

Točno poznata količina ugljičnog dioksida uvođena je u apsorpcionu otopinu, kojoj je temperatura iznosila konstantno 25,0 $\pm$ 0,02° C. Ugljični dioksid dobiven je iz otopine natrijeva karbonata poznatog titra, a ta se otopina pušta iz birete *3* u vruću (110° C) razrijeđenu (1 : 4) sumpornu kiselinu *4*. Nastali ugljični dioksid istjeran je strujom dušika. Dušik iz bombe *5* prethodno je očišćen od eventualnog ugljičnog dioksida prolazom kroz apsorpcione tornjiće s natronskim vapnom i natronskim azbestom *6*. Prolazom plinske smjese kroz povratno hladilo *7*, azbestni filtar i filtar od staklene vune *8*, uklonjena je iz nje kondenzacijom vodena para. Smjesa plinova ulazi zatim u prvi apsorpcioni toranj *1*, u kojem je ujedno mjerena vodljivost. Prvi apsorpcioni toranj spojen je s drugim *1'*, u kojem se nalazi barijev hidroksid veoma malene koncentracije. I u drugom apsorpcionom tornju mjerena je vodljivost, koja je za čitavog procesa bila konstantna, jer su koncentracioni uvjeti i brzina prolaza plinova bili takvi, da je u prvom tornju nastala uvijek kvantitativna apsorpcija. (Brzina strujanja dušika kontrolirana je diferencijalnim manometrom *9*, a iznosila je, već prema koncentraciji barijeva hidroksida, do 0,2 litre na minutu). Drugi apsorpcioni toranj, s obzirom na malenu koncentraciju barijeva hidroksida, registrira lagano već 0,04 ccm CO_2, ukoliko apsorpcija u prvom tornju ne bi bila kvantitativna.

Apsorpcione posude nalazile su se u vodenom termostatu *10*, kojemu je temperatura bila konstantna na $\pm$ 0,02° C, što je postignuto uz pomoć živina kontaktnog termometra *11*. Apsorpciona posuda *12*, u kojoj se je nalazila otopina barijeva hidroksida, priječila je, da ugljični dioksid iz atmosfere uđe u apsorpcione tornjeve *1* i *1'*. Pošto je ugljični dioksid apsorbiran u prvom tornjiću, stakleni čep *13* je na čas uklonjen, u tornjić *1* stavljena je elektroda *15* i izmjerena je vodljivost otopine barijeva hidroksida.

Vodljivost je mjerena Wheatstoneovim mostom *14* između platiniziranih platinskih elektroda za uronjavanje *15*, koje su u otopini n/10 KCl kod 25° C pokazivale otpor od 42,5 oma. Elektrode su prije svakog mjerenja oprane u jako razrijeđenoj solnoj kiselini i u destiliranoj vodi. Krajevi mosta nalazili su se pod naponom od 4 volta izmjenične



Slika 1.

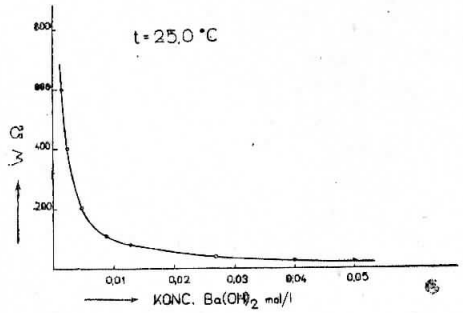
struje frekvencije 50 herca. Struja za miliampermetar *17* prethodno je pojačana trocijevnim pojačalom *16*. Kod minimuma razlike napona pokazivao je miliampermetar minimum otklona. Istovremeno se utrnula indikatorska tinjalica na pojačalu. Vrijednost promjenljivog otpora *18* određena je pomoću Pontavi-Wheatstoneova mosta *19*. Točnost mjerenja iznosila je 1 do 2‰.

Elektrodna ćelija za uronjavanje naročito je podesna kod kontinuiranog mjerenja ugljičnog dioksida, koji se oslobađa za nekog procesa, jer nije potrebno prekidati uvođenje ugljičnog dioksida u apsorpcionu tekućinu. To je omogućeno time, što se unatoč stalnom smanjivanju koncentracije barijeva hidroksida u apsorpcionoj otopini praktički ne mijenja koncentracija otopine u elektrodnim ćelijama za kratko vrijeme mjerenja otpora.

2. *Eksperimentalni dio*

Ponajprije je nađena zavisnost otpora W otopine barijeva hidroksida od njegovih koncentracija, kako to prikazuje dijagram 1. Krivulja je eksperimentalno dobivena mjerenjem otpora otopine barijeva hidroksida različitih koncentracija kod 25,0° C. Količina barijeva hidroksida određena je titracijom s 0,1 n HCl uz fenolftalein i kontrolirana je elektrotitracijom.

Dobivena krivulja predstavlja istostranu hiperbolu, gdje je umnožak otpora W i koncentracije barijeva hidroksida konstantan, a njegova srednja vrijednost iznosi 1,066.



Dijagram 1.

Analognu krivulju za zavisnost otpora otopine barijeva hidroksida od njene koncentracije dobili su i J. R. Cain i L. C. Maxwell.

U nizu daljih mjerenja, koja su izvedena opisanom aparaturom, nađena je zavisnost otpora W otopine barijeva hidroksida, određenog početnog otpora W_0, od apsorbirane količine ugljičnog dioksida. Početni otpori W_0 varirani su u velikom intervalu od 32 do 2400 oma. Početne koncentracije barijeva hidroksida, koje korespondiraju početnim otporima W_0, variraju između 0,04 i 0,001 mola/l, a vrijednosti tih koncentracija mogu se uzeti s dijagrama 1.

Rezultati jednog dijela ovakvih mjerenja prikazani su u tabeli 1, koja sadržava pet mjerenja s otopinama barijeva hidroksida različitih početnih otpora W_0. Količina apsorpcione otopine iznosila je 500 ccm kao i kod ostalih pokusa. U prvu kolonu uneseni su otpori W u omima. U drugoj koloni nave-

dene su apsorbirane količine ugljičnog dioksida a u gram-ekvivalentima. Temperatura apsorpcione otopine iznosila je 25,0° C.

t = 25,0° C; količina apsorpcione otopine: 500 ccm.

I		II		III		IV		V	
W	$a \cdot 10^4$	W	$a \cdot 10^4$	W	$a \cdot 10^4$	W	$a \cdot 10^4$	W	$a \cdot 10^4$
W_0 =		W_0 =		W_0 =		W_0 =		W_0 =	
32,3	0	69,4	0	171,0	0	282,0	0	403,0	0
35,0	39,08	86,0	43,08	236,0	24,00	353,0	8,616	463,1	4,000
38,0	82,16	116,0	86,16	282,0	32,31	403,0	12,924	500,2	6,051
43,1	124,24	182,0	129,24	371,0	43,08	450,0	16,000	535,0	7,600
49,4	172,32	473,0	172,32	400,0	45,60	482,0	17,632	571,5	9,101
56,8	215,40	610,0	179,01	458,5	49,54	569,0	21,54	600,1	10,202
68,9	258,48	3300	193,86	550,0	56,90	732,0	26,25	684,0	12,912
86,9	301,56			624,0	56,00			772,2	14,800
122,0	344,64								
207,5	387,70								
472,7	422,50								
730,0	434,00								

Tabela 1.

Dijagram 2. prikazuje te rezultate grafički.

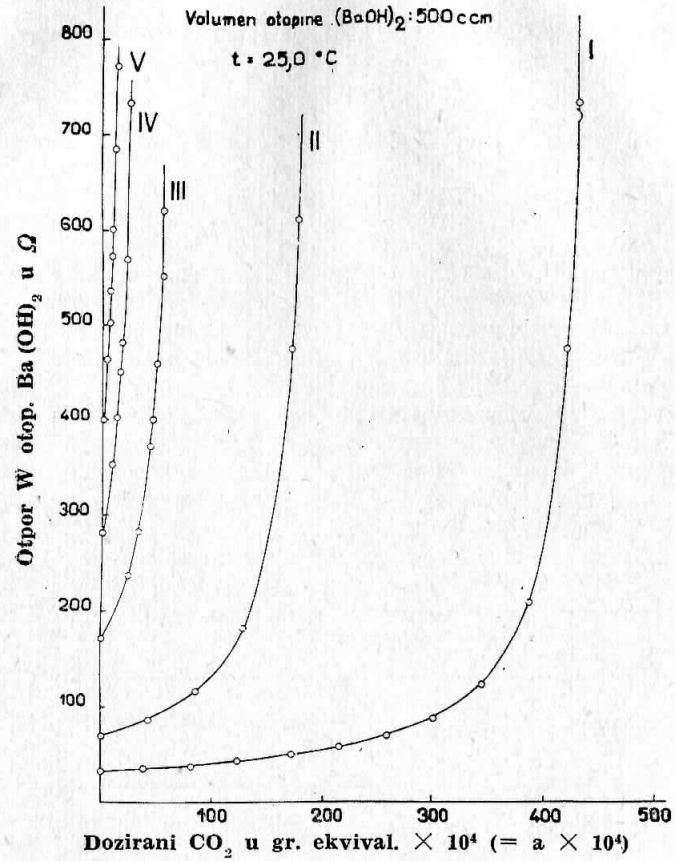
Početni otpori W_0 otopina barijeva hidroksida iznosili su — kako se iz tabele 1. vidi — 32,3, 69,4, 171,0, 282,0 i 403,0 oma.

Uvodimo li neku nepoznatu količinu ugljičnog dioksida u otopine barijeva hidroksida tih i s t i h početnih otpora i istog volumena, možemo tu količinu ugljičnog dioksida odrediti iz dijagrama 2., pošto izmjerimo promjenu u otporu otopina.

Krivulja I istostrana je hiperbola, koja pomakom osi ordinata prelazi u drugi kvadrant koordinatnog sustava. Novi položaj osi ordinata odredili smo u ovom slučaju grafički. Jednadžba funkcije glasi:

$$-(C - a) \cdot W = k \qquad (1)$$

gdje je C konstanta, kojoj je vrijednost 0,0452, jer je za taj iznos došlo do pomaka koordinatne osi. a je količina ugljičnog dioksida u gram-ekvivalentima, W je otpor otopine barijeva hidroksida u omima. Vrijednost konstante k neznatno varira u čitavom području funkcije I, kako to pokazuje tabela 2.



Dijagram 2.

t = 25° C		
— (C — a)	W	k
— 0,02782	50	— 1,391
— 0,01337	100	— 1,337
— 0 00887	150	— 1,331
— 0,00681	200	— 1,362
— 0,00557	250	— 1,392
— 0,00357	400	— 1,428
— 0,00210	700	— 1,470
		k_S = — 1,388

Tabela 2.

Jednadžba hiperbole (1) može se transformirati na ovaj oblik:

$$a = \frac{k + C \cdot W}{W} \qquad (2)$$

odnosno

$$a = \frac{-1{,}388 + 0{,}0452 \cdot W}{W} \qquad (2a)$$

Ako su nam poznate konstante k i C, može se pomoću jednadžbe (2) izračunati apsorbirana količina ugljičnog dioksida uvrštavanjem izmjerenog otpora one otopine barijeva hidroksida, kojemu početni otpor W_0 iznosi 32,3 oma (to je početni otpor baždarne krivulje I u dijagramu 2.).

Da se utvrdi mogućnost upotrebe jednadžbe (2), navedene su u tabeli 3. količine apsorbiranog ugljičnog dioksida u gram-ekvivalentima izračunate pomoću ove jednadžbe. Te količine treba da odgovaraju različitim izmjerenim otporima one otopine barijeva hidroksida, koja kod 25,0° C pokazuje početni otpor W_0 od 32,3 oma. Volumen apsorpcione otopine i opet je iznosio 500 ccm. Iz tabele je vidljivo, da se tako dobivene vrijednosti za CO_2 razlikuju samo neznatno od stvarno doziranih količina ovog plina (vidi i tab. 1, stupac I.).

W	Izračunati CO_2 u gr. ekvival. a	Dozirani CO_2 u gr. ekvival.	Pogreška %
49,4	0,0187	0,01723	+ 3,4
56,8	0,0214	0,02154	— 0,65
68,9	0,0256	0,02585	— 0,96
86,9	0,0297	0,03016	— 1,5
122,0	0,0342	0,03446	— 0,72
207,5	0,0388	0,03877	+ 0,07
472,5	0,0425	0,04225	+ 0,59
730	0,0435	0,04340	+ 0,23
$t = 25{,}0^0$ C			

Tabela 3.

Konstante k i C mogu se lagano odrediti računski iz izraza $a = \frac{k + C \cdot W}{W} \cdot a$ i W su naime poznate veličine dobivene na način opisan u vezi s prikazom tabele 1. Poznatim količinama ugljičnog dioksida a odgovaraju ovdje izmjereni otpori W.

Upotrebivši podatke stupca I tabele 1. možemo postaviti više kombinacija od po dvije jednadžbe s nepoznanicama k i C, na pr.:

$$0{,}008216 = \frac{k + C \cdot 38}{38} \quad \text{i} \quad 0{,}038770 = \frac{k + C \cdot 207{,}5}{207{,}5};$$

$$0{,}021540 = \frac{k + C \cdot 56{,}8}{56{,}8} \quad \text{i} \quad 0{,}034464 = \frac{k + C \cdot 122}{122} \text{ i t. d.}$$

k i C mogu se odatle izračunati kao srednje vrijednosti mnogih kombinacija.

Tako su dobiveni podaci za srednje vrijednosti konstanti k i C:

$$k_s = -1{,}3617$$

$$C_s = 0{,}04537.$$

Te vrijednosti svakako su točnije od onih, koje su određene grafički ($C = 0{,}0452$, $k = -1{,}388$), iako se od njih znatno ne razlikuju.

Krivulje II, III, IV i V dijagrama 2. također su istostrane hiperbole, no one su od nove (desne) osi ordinata to više udaljene, što je početni otpor W_0 veći. Uvrštavanjem njihovih početnih otpora W_0 i računski određenih konstanti u jednadžbu (2) dobivamo iznos

$$\frac{-1{,}3617 + 0{,}04537 \cdot W_0}{W_0},$$

koji moramo o d b i t i od izračunate količine ugljičnog dioksida po jednadžbi

$$a = \frac{-1{,}3617 + 0{,}04537 \cdot W}{W}$$

tako, da općeniti izraz za računsko određivanje ugljičnog dioksida mjerenjem otpora otopine barijeva hidroksida, b i l o k o j i h početnih koncentracija, dobiva oblik

$$a = \frac{k + C \cdot W}{W} - \frac{k + C \cdot W_0}{W_0}. \qquad (3)$$

W_0 je pri tome početni otpor one otopine barijeva hidroksida (bilo koje prikladne koncentracije), koja nam otopina služi kod konduktometrijske analize kao apsorpciono sredstvo. Za svaki u procesu izmjereni otpor W može se lagano izračunati apsor-

birana količina CO_2 (a), ako su jednom zauvijek na spomenuti način određene konstante k i C. Temperatura treba, naravno, da je kod svih određivanja konstantna.

Pomoću jednadžbe (3) izračunate su količine ugljičnog dioksida, koje su apsorbirale otopine barijeva hidroksida početnih otpora W_0 u iznosu od 69,4, 171,0, 282,0 i 403,0 ohma. Time je obuhvaćen čitav interval koncentracija otopina barijeva hidroksida, koje dolaze u račun kod kondutometrijskog određivanja ugljičnog dioksida u količinama od 0,05 do 500 ccm ovog plina, što odgovara približno 0,1 mg do 1 g CO_2.

Rezultati tih računa za otopine početnih otpora W_0 u iznosu od 69,4 i 171,0 oma prikazani su u tabeli 4. Vrijednosti za a, kod $W_0 = 69{,}4$, izračunate su prema tome pomoću jednadžbe

$$a = \frac{-1{,}3617 + 0{,}04537 \cdot W}{W} - \frac{-1{,}3617 + 0{,}04537 \cdot 69{,}4}{69{,}4}.$$

Analogno su dobivene vrijednosti a za otopinu s $W_0 = 171{,}0$ oma, a navedene su u istoj tabeli 4.

W	Izračunati CO_2 u gr. ekvival. a	Dozirani CO_2 u gr. ekvival.	W	Izračunati CO_2 u gr. ekvival. a	Dozirani CO_2 u gr. ekvival.
$W_0 =$			$W_0 =$		
69,4	0	0	171,0	0	0
86,0	0,0038	0,0039	282,0	0,00313	0,00323
116,0	0,0080	0,0082	371	0,00430	0,00431
182,0	0,0122	0,0124	400	0,00456	0,00458
473	0,0168	0,0172	458	0,00498	0,00495
610	0,0174	0,0179	550	0,00549	0,00545
3300	0,0192	0,0194	624	0,00578	0,00560
$t = 25{,}0^0$ C					

Tabela 4.

Iz ove se tabele vidi, da se izračunate vrijednosti za a neznatno razlikuju od stvarno doziranih količina ugljičnog dioksida.

Kada bismo kod funkcija, koje odgovaraju krivuljama IV i V, upotrebili konstante k i C dobivene iz krivulje I, nastale bi veće pogreške, jer je ovdje razlika koncentracija apsorpcionih otopina suviše velika, t. j. početni otpori W_0 nisu istog

reda veličine. Stoga je podesnije, da se ove funkcije predstave konstantama dobivenim iz krivulje III, a te konstante možemo dobiti pomoću jednadžbe (2), ako u nju uvrstimo W i a iz kolone III tabele 1. Za k i C dobivene vrijednosti iznose sada $k_S = -1{,}2214$ i $C_S = 0{,}007585$. Kako se odatle vidi, konstanta k ima isti red veličine kao i konstanta dobivena iz krivulje I ($-1{,}3617$). Kasnija razmatranja pokazat će nam, da uzrok tome treba tražiti u činjenici, što je konstanta k specifična za elektrode, a zavisna je samo od temperature. Budući da je temperatura u oba slučaja konstantna (25,0° C), a mjerenja su izvršena istim elektrodama, promijenila se je vrijednost konstante k samo u granicama eksperimentalnih pogrešaka.

Konstanta C_S se naprotiv bitno promijenila, jer ona predstavlja — kako smo već spomenuli — zapravo onu količinu CO_2, što stvara maksimalan otpor apsorpcione otopine, kojom vršimo baždarenje, dakle otpor identičan s otporom čiste vode. To je prema tome ona količina ugljičnog dioksida, što je ekvivalentna barijevu hidroksidu prisutnom u otopini, kojom se vrši temeljno baždarenje.

U tabeli 5. izračunate su pomoću tako dobivenih konstanti k i C, a prema jednadžbi $a = \frac{-1{,}2214 + 0{,}007585 \cdot W}{W}$, količine ugljičnog dioksida, koje odgovaraju različitim otporima W. Dobivene vrijednosti za CO_2 (a) neznatno se razlikuju od stvarno doziranih količina.

W	Izračunati CO_2 u gr. ekvival. a	Dozirani CO_2 u gr. ekvival.
$W_0 =$		
171	0,00040	0
236	0,00246	0,00240
282	0,00325	0,00323
371	0,00429	0,00431
400	0,00453	0,00456
458	0,00492	0,00495
550	0,00537	0,00549
624	0,00562	0,00560
$t = 25{,}0^0$ C		

Tabela 5

Kod apsorpcionih otopina početnih otpora W_0 većih od 171,0 oma, izračunat ćemo količinu ugljičnog dioksida pomoću jednadžbe (3), u koju smo uvrstili naprijed dobivene konstante k i C:

$$a = \frac{-1{,}2214 + 0{,}007585 \cdot W}{W} - \frac{-1{,}2214 + 0{,}007585 \cdot W_0}{W_0}.$$

Rezultate za otopinu s $W_0 = 282$ oma pokazuje tabela 6. Dobiveni podaci za a odlično se podudaraju s doziranim količinama ugljičnog dioksida.

W	Izračunati CO_2 u gr. ekvival. a	Dozirani CO_2 u gr. ekvival.	W	Izračunati CO_2 u gr. ekvival. a	Dozirani CO_2 u gr. ekvival.
$W_0 =$			$W_0 =$		
282	0	0	403	0	0
353	0,000870	0,000862	463	0,000390	0,000405
403	0,00130	0,00129	500	0,000590	0,000605
450	0,00161	0,00160	535	0,000750	0,000760
482	0,00179	0,00176	571	0,000894	0,000910
569	0,00218	0,00215	600	0,001005	0,001020
732	0,00266	0,00263	684	0,00125	0,00129
			772	0,00145	0,00148
$t = 25{,}0^0$ C					

Tabela 6.

Unatoč velikoj osjetljivosti takve otopine, gdje malene količine apsorbiranog ugljičnog dioksida uzrokuju velike promjene otpora, može se ipak količina ugljičnog dioksida odrediti računski uz pogrešku do 2%.

U istoj tabeli 6. navedeni su i analogni podaci za otopinu s početnim otporom $W_0 = 403$ oma (vidi i krivulju V dijagrama 2.), gdje se radi o još dva puta manjim količinama CO_2.

Ove eksperimentalne činjenice dokazuju, da se određivanja ugljičnog dioksida mogu konduktometrijski vršiti uz upotrebu otopina barijeva hidroksida, koje se po koncentraciji znatno razlikuju od one otopine, kojom je vršeno baždarenje, t. j. određivanje konstanti k i C.

Te eksperimentalne činjenice ujedno su dokaz, da barijev karbonat, koji je nastao za procesa apsorpcije, praktički ne utječe na vodljivost niti bitno mijenja konstante ćelije.

3. *Primjena opisane metode*

Želimo li konduktometrijski određivati ugljični dioksid, koji se oslobađa tokom nekog procesa, potrebno nam je prije svega odrediti konstante k i C ćelije, koja nam stoji na raspolaganje za određivanje vodljivosti. Ove se konstante određuju doziranjem poznatih količina ugljičnog dioksida u otopinu barijeva hidroksida neke koncentracije, koja je nešto veća od ekvivalenta ukupnog ugljičnog dioksida, koji očekujemo u procesu. Nakon završene apsorpcije ugljičnog dioksida treba naime da nam otopina sadržava još neki mali suvišak slobodnog barijevog hidroksida.

Iz po dva podatka za a (dozirana količina CO_2) i W (otpor otopine poslije apsorpcije a) možemo prema jednadžbi (2) izračunati k i C, kako je to opisano na str. 147.

Pošto smo pripravili aparaturu i na opisani način odredili konstante k i C naše ćelije, možemo pristupiti mjerenju količina ugljičnog dioksida, koje se oslobađaju za procesa, što ga istražujemo. U tu svrhu treba namjesto posudice 4 sl. 1. staviti posudicu, u kojoj se odvija istraživani proces.

Ako se određuje ugljični dioksid u uzduhu, treba naravno isključiti sav uređaj, koji se nalazi pred apsorpcionim tornjem 1, te provoditi određene količine uzduha.

Kod ovakvih određivanja nepoznatih količina ugljičnog dioksida potrebno je, da kao apsorpcionu otopinu izaberemo otopinu barijeva hidroksida neke koncentracije, tako da je početni W_0 nešto veći od W_0 otopine, koja nam je poslužila kod upravo spomenutog baždarenja. Što je W_0 otopine za apsorpciju bliži otporu W_0 baždarne otopine, to će točnost mjerenja biti, naravno, veća.

Uvršćujući vrijednosti za k i C, W i W_0 u jednadžbu (3) dobivamo vrijednosti za količine ugljičnog dioksida u onim jedinicama, u kojima su izražene dozirane količine ugljičnog dioksida (gramekvivalenti u našem slučaju).

Karakter konstanti k i C

Da se utvrdi mogućnost primjene ove metode uz upotrebu različitih elektroda, a i zato, da se otkrije karakter konstanti k i C, učinjeni su pokusi s još jednom elektrodom (elektroda II). Dok je elektroda, kojom smo vršili glavna mjerenja (elektroda I) pokazivala u otopini 0,1 n KCl kod $25{,}0^0$ C otpor od 42,5 oma, elektroda II davala je uz iste uvjete otpor

od 18,5 oma. Elektroda II pokazivala je otpor od 11,5 oma u onoj otopini barijeva hidroksida, u kojoj je elektroda I davala otpor od 32,3 oma (vidi tabelu 1. stupac I.).

Rezultati mjerenja elektrodom II. navedeni su u tabeli 7.

W	$a \cdot 10^4$	W	$a \cdot 10^4$
11,5	0	47,1	344,64
14,6	86,16	87,1	387,72
19,6	172,32	142,0	409,26
26,8	258,48	500	430,80
$t = 25{,}0^0$ C			

Tabela 7.

Iz ovih podataka izračunate su prema jednadžbi (2) konstante k i C:

$$k_{II} = -0{,}53877$$

$$C = 0{,}0450.$$

Uz upotrebu elektrode I ove su vrijednosti iznosile:

$k_I = -1{,}3617$ odnosno $C = 0{,}0454$ (vidi str. 147).

Iz svega toga je vidljivo, kako smo to već spomenuli na str. 149., da je konstanta k specifična za elektrodu, dok konstanta C zavisi samo o koncentraciji barijeva hidroksida one otopine, koja služi kao apsorpciona otopina za baždarenje.

5. *Pitanje utjecaja barijeva karbonata na vodljivost apsorpcione otopine*

H. A. Spoehr i H. Mc. Gree ustanovili su, da se vodljivost ćelije mijenja u toku apsorpcije ugljičnog dioksida radi precipitacije barijeva karbonata. A. C. Raymond i H. M. Winegarden kontrolirali su mjerenja H. A. Spoehra i H. Mc. Greea i ustanovili, da promjene ne nastaju, ako se ugljični dioksid apsorbira, prije nego dopre do elektroda. Promjena vodljivosti ćelije imala bi biti dakle uzrokovana taloženjem barijeva karbonata na samoj površini platinske elektrode, a ne zbog naknadne adsorpcije $BaCO_3$ na elektrodama.

Da provjerimo ovu pretpostavku H. A. Raymonda i H. M. Winegardena, umočili smo elektrode u otopinu barijeva hidroksida i izložili ih atmosferi ugljičnog dioksida. Barijev karbonat taložio se tako u samim porama platiniziranih elektroda, a posljedica toga bila je, da su takve elektrode pokazivale oko 15% veći otpor.

Također smo mjerili vodljivost bistrih otopina barijeva hidroksida, u kojima je barijev karbonat bio sedimentiran, a tako i nakon mućkanja. U uzmućkanim otopinama s mnogo suspendiranog $BaCO_3$, otpor ćelije bio je povećan za 0,5—1%. Smatramo, da je pretpostavka H. A. Raymonda i H. M. Winegardena time dokazana.

Upravo s razloga, da se uklonimo stvaranju barijeva karbonata na samim elektrodama, vršili smo naša mjerenja elektrodama za uronjavanje. S filtrom G_1 Schott-Gen.-Jena apsorpcionog tornjića postigli smo disperziju plina u sitne mjehuriće, koje je otopina barijeva hidroksida lagano apsorbirala, prije nego što je plin mogao doprijeti do elektroda.

6. *Granice primjene opisane metode*

Opisana konduktometrijska metoda može se primijeniti za pojedinačna ili kontinuirana mjerenja slobodnog ugljičnog dioksida do ukupnih količina od približno 0,04—500 ccm (= 0,08—800 mg CO_2).

Za mjerenje podesne su približno ove koncentracije $Ba(OH)_2$:

za količine CO_2	mola $Ba(OH)_2$/l
od 0,04 do oko 50 ccm	0,007
„ 25 „ „ 150 „	0,015
„ 50 „ „ 500 „	0,030

Najmanja količina CO_2, koja se može jednim mjerenjem odrediti, iznosi oko 0,04 ccm = $3{,}57 \cdot 10^{-6}$ gramekvivalenta CO_2. Razumije se, da u ovom ekstremnom slučaju treba upotrebiti najmanju od navedenih koncentracija barijeva hidroksida.

Ove granice dane su, dakako, količinom apsorpcione otopine od 500 ccm. — Smanjivanjem toga volumena može se znatno povećati osjetljivost ove metode, a granice njene primjene mogu se tako pomaknuti prema manjim količinama ugljičnog dioksida. Povećavanjem volumena apsorpcione otopine mogu se, s druge strane, granice primjene proširiti prema većim količinama ugljičnog dioksida.

II. Mjerenje kod različitih temperatura

U nizu pokusa moglo se ustanoviti, da je utjecaj temperature na konstantu k veoma znatan, no u onom temperaturnom intervalu koji praktički dolazi u račun kod konduktometrijske analize, zavisnost je te konstante od temperature linearna, kako ćemo to malo kasnije pokazati. Promjene konstante k, uzrokovane temperaturom, mogu se dakle lagano kod određivanja ugljičnog dioksida uzeti u račun i korigirati.

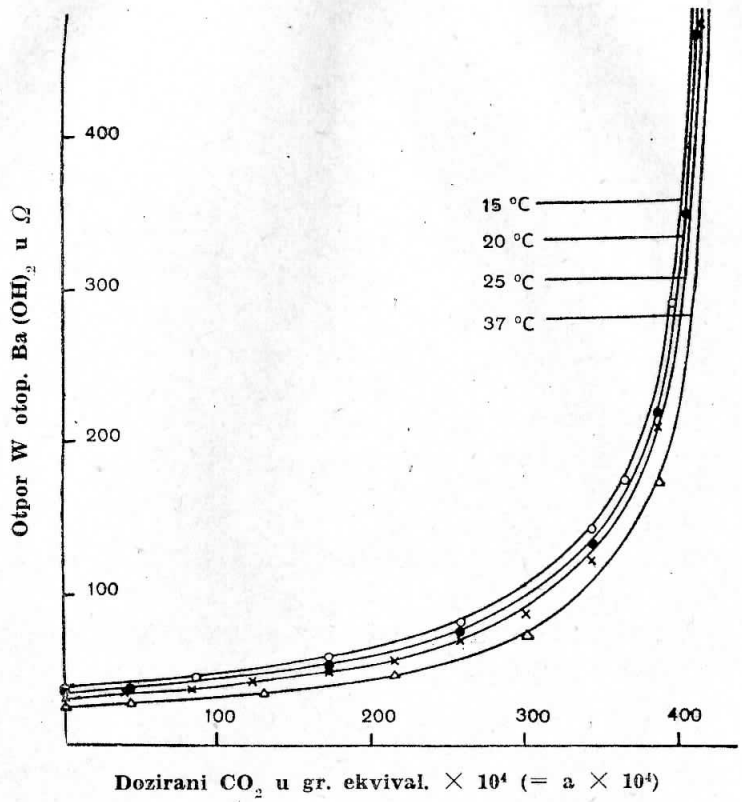
Mjerenja vodljivosti otopine $Ba(OH)_2$ vršena su u temperaturnom intervalu između 15° i 37° C. Rezultati tih mjerenja prikazani su u tabeli 8.

I 15,5 °C		II 20,0 °C		III 25,0 °C		IV 37,0 °C	
W	$a \cdot 10^4$	W	$a \cdot 10^4$	W	$a \cdot 10^4$	W	$a \cdot 10^4$
$W_0 =$		$W_0 =$		$W_0 =$		$W_0 =$	
37,9	0	34,9	0	32,3	0	26,2	0
45,5	86,16	38,5	43,08	35,0	39,08	28,8	43,08
58,7	172,32	41,9	86,16	88,0	82,16	35,4	129,24
81,5	258,48	54,1	172,32	43,1	124,24	47,3	215,40
142	344,64	75,2	258,48	49,4	172,32	72,7	301,56
174	366,18	133	344,64	56,8	215,40	171	387,72
289	398,49	218	387,72	68,9	258,48	538	430,80
500	419,50	347	409,26	86,9	301,56		
		465	420,03	122	344,64		
		723	430,80	207	387,70		
				473	422,50		
				730	434,00		

Tabela 8.

Sva četiri mjerenja izvršena su jednom i istom otopinom barijeva hidroksida, koja je kod 25,0° C pokazivala otpor W_0 od 32,3 oma, a njena koncentracija iznosila je $3{,}3 \cdot 10^{-2}$ mola $Ba(OH)_2$/l. Elektrodna ćelija, kojom je mjerena vodljivost, davala je u otopini n/10 KCl-a, kod 25,0° C, otpor od 42,5 oma.

Rezultati tabele 8. prikazani su dijagramom 3., na kojem se vidi tok dobivenih izoterma.



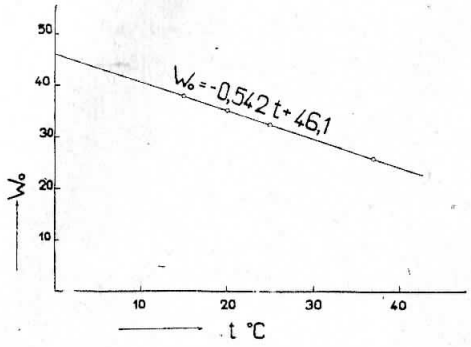
Dijagram 3.

Početni otpor W^0 otopine barijeva hidroksida navedene koncentracije opada s povišenjem temperature, kako se vidi iz tabele 8.

Temperaturni kvocijent $Q_{10} = \frac{W_{0(t+10)}}{W_{0(t)}}$ početnog otpora W_0 iznosi u našem slučaju za temperature 15,0 i 25,0° C: $\frac{32{,}3}{37{,}9} = 0{,}85$. To znači, da se povišenjem temperature apsorpcione otopine za 10° C smanjuje početni otpor W_0 za približno 0,85 puta. Kod otpora W_0 veličina promjene bit će W_0—0,85 W_0, što iznosi 15,4%.

Povišenju temperature od 1° C odgovara prema tome smanjenje otpora za 1,54%.

Zavisnost je početnih otpora W_0 od temperature linearna, kako to prikazuje dijagram 4.



Dijagram 4.

Za svaku temperaturu t može se odrediti početni otpor W_0 otopine pomoću jednadžbe pravca:

$$W_0 = -0{,}542\, t + 46{,}1.$$

Izoterme dijagrama 3. mogu se prikazati jednadžbom istostrane hiperbole

$$a = \frac{k + C \cdot W}{W} \qquad (4)$$

kako je izloženo u prvom dijelu; a je količina CO_2 u gram-ekvivalentima, W je izmjereni otpor otopine $Ba(OH)_2$ u omima, a k i C su konstante, koje se određuju uz pomoć podataka tabele 8.

Učvršćivanjem vrijednosti za a i W u jednadžbu (4) možemo naime — kako je već ranije opisano (vidi na str. 147. prvog dijela radnje) — izračunati vrijednosti za konstante k i C kao srednje vrijednosti mnogih kombinacija.

U tabeli 9. uneseni su rezultati ovakvih računa za sve četiri kolone tabele 8.

Temperatura °C	C	k
15	0,04546	— 1,6654
20	0,04536	— 1,5410
25	0,04537	— 1,3617
37	0,04536	— 1,1486
$C_S = 0{,}04539 \doteq 0{,}0454.$		

Tabela 9.

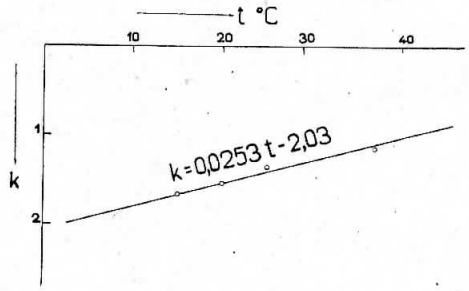
Vidimo, da je C konstanta nezavisna od temperature, dok k povišenjem temperature raste.

Temperaturni kvocijent konstante k iznosi:

$$Q_{10} = \frac{k_{t+10}}{k_t} = \frac{k_{25}}{k_{15}} = \frac{-1{,}3617}{-1{,}6654} = 0{,}82.$$

Približno istu vrijednost imao je i temperaturni kvocijent početnog otpora W_0 (0,85).

Zavisnost $k = f(t)$ je linearna u spomenutom temperaturnom intervalu, kako nam to prikazuje dijagram 5.



Dijagram 5.

Za svaku temperaturu t može se k prema tome izračunati iz jednadžbe pravca:

$$k = 0{,}0253\, t - 2{,}03 \qquad (5)$$

Ako želimo određivanje ugljičnog dioksida vršiti kod neke temperature, koja se razlikuje od temperature apsorpcione otopine, a njome smo se služili kod određivanja konstanti k i C

naše ćelije, moramo promjenu konstante k uzeti u račun. To se može učiniti tako, da se kod dvije temperature t_1 i t_2 odrede konstante k_1 i k_2 na način, kako je već opisano na str. 147. prvog dijela radnje. Tako se dobivaju dvije jednadžbe tipa

$$k_1 = m \cdot t_1 + n$$
$$k_2 = m \cdot t_2 + n,$$

pomoću kojih možemo izračunati vrijednosti za m i n.

Mjesto konstante k možemo dakle u jednadžbu (4) uvrstiti njenu temperaturnu funkciju, čime ova jednadžba u našem slučaju dobiva oblik:

$$a = \frac{0{,}0253\,t - 2{,}03 + C\,W_t}{W_t} \qquad (6)$$

Ova jednadžba predstavlja izraz za krivulju baždarenja kod bilo koje temperature. Za konstantu C uvršćujemo ovdje njenu srednju vrijednost 0,0454 (v. tab. 9).

Tako na pr. želimo li apsorpciju ugljičnog dioksida izvršiti kod temperature od 20° C, izračunat ćemo apsorbiranu količinu ugljičnog dioksida prema jednadžbi (6) uvršćujući $t = 20$, a za W_t izmjereni otpor W_{20}:

$$a = \frac{0{,}0253 \cdot 20 - 2{,}03 + 0{,}454 \cdot W_{20}}{W_{20}} = \frac{-1{,}541 + 0{,}0454 \cdot W_{20}}{W_{20}} \qquad (7)$$

Dobivene vrijednosti a u gramekvivalentima unijete su u tabelu 10., koja pokazuje, da se one ne razlikuju znatnije od stvarno doziranih količina.

W_{20}	Izračunati CO_2 u gr. ekvival. a	Dozirani CO_2 u gr. ekvival.	Pogreška %
34,9	0,0010	0	∞
41,9	0,0078	0,0086	— 9,3
54,1	0,0169	0,0172	— 1,7
75,2	0,0249	0,0258	— 3,5
133	0,0338	0,0345	— 2,0
218	0,0383	0,0388	— 1,3
347	0,0409	0,0409	0
465	0,0420	0,0420	0
723	0,0432	0,0431	+ 0,2
$t = 20{,}0\ ^0C$			

Tabela 10.

Budući da je jednadžba krivulje baždarenja kod neke temperature t dana izrazom

$$a = \frac{0{,}0253\,t - 2{,}03 + 0{,}0454 \cdot W_t}{W_t},$$

općeniti izraz za računsko određivanje ugljičnog dioksida iz podataka, koje smo dobili mjerenjem otpora otopine barijeva hidroksida bilo kojih koncentracija dobiva ovaj oblik:

$$a = \frac{0{,}0253\,t' - 2{,}03 + 0{,}0454 \cdot W_{(t')}}{W_{(t')}} - \frac{0{,}0253\,t - 2{,}03 + 0{,}0454 \cdot W_{0(t)}}{W_{0(t)}}, \qquad (8)$$

gdje $W_{0(t)}$ znači početni otpor apsorpcione otopine kod temperature t, a $W_{(t')}$ otpor iste otopine nakon apsorpcije CO_2 kod temperature t'.

Za određivanje količina CO_2, apsorbiranih u otopini $Ba(OH)_2$ bilo kojih koncentracija i uz bilo koju temperaturu, potrebno nam je prema tome znati samo početni otpor $W_{0(t)}$ i nastali otpor $W_{(t')}$ apsorpcione otopine pri temperaturi mjerenja t'.

Kao dokaz za ispravnost primjene jednadžbe (6) može poslužiti tabela 11., koja donosi podatke za izračunati i dozirani CO_2, apsorbiran u otopini barijeva hidroksida s početnim otporom $W_{0(25)} = 171{,}0$ ohma.

t'	$W_{(t')}$	Izračunati CO_2 u gr. ekvival. a	Dozirani CO_2 u gr. ekvival.	Pogreška %
	$W_0 =$			
25,0	171,0	0	0	
20,6	305	0,00322	0,00323	— 8,3
23,1	383	0,00440	0,00431	+ 2,1
25,0	400	0,00468	0,00456	+ 2,4
28,8	427	0,00512	0,00495	+ 2,9
29,4	504	0,00562	0,00549	+ 2,4
30,2	566	0,00593	0,00560	+ 3,2

Tabela 11.

Praktičan smisao dobiva jednadžba (8) onda, kad se temperatura apsorpcione otopine iz bilo kojih razloga ne može održati konstantnom.

U tom slučaju potrebno je namjesto $W_{o(t)}$ uvrstiti početni otpor apsorpcione otopine kod temperature t^0 C, t. j. kod one temperature, kod koje je započeto mjerenje, a namjesto $W_{t'}$ otpor nakon apsorpcije CO_2 pri promijenjenoj temperaturi t'^0 C.

Kratak sadržaj

1. Opisane su aparatura i metoda, kojima se može konduktometrijski pojedinačno ili kontinuirano određivati slobodni CO_2, koji nastaje za nekog reakcionog procesa. Kao apsorpciona tekućina služi otopina barijeva hidroksida, a njegovu koncentraciju nije potrebno odrediti, što predstavlja naročitu prednost pred dosad opisanim metodama.

2. Ovisnost otpora otopine $Ba(OH)_2$ od količina apsorbiranog CO_2 pokazuje funkciju hiperbole: $-(C-a)\cdot W = k$, gdje a = količina CO_2 u gr. ekvivalentima, W = otpor otopine nakon apsorpcije, a k i C su konstante.

3. Količina apsorbiranog ugljičnog dioksida može se odrediti po izvedenoj jednadžbi: $a = \frac{k + C\cdot W}{W} - \frac{k + C\cdot W_0}{W_0}$, gdje W_0 = početni otpor otopine barijeva hidroksida bilo koje koncentracije prikladne za apsorpciju. Navedena jednadžba vrijedi za konstantnu temperaturu.

4. k i C su konstante, koje treba jednom zauvijek odrediti uz pomoć poznatih količina ugljičnog dioksida. Opisana je metoda za njihovo izračunavanje. Konstanta k specifična je za elektrodu i ovisna je samo o temperaturi. Konstanta C predstavlja količinu ugljičnog dioksida ekvivalentnu količini barijeva hidroksida u otopini, kojom je vršeno temeljno baždarenje.

5. Budući da opisana aparatura radi s elektrodama za uronjavanje, nastali barijev karbonat praktički ne utječe na vodljivost otopine barijeva hidroksida.

6. Uz upotrebu 500 ccm apsorpcione otopine može se opisana metoda primijeniti za pojedinačna kao i za kontinuirana mjerenja slobodnog ugljičnog dioksida do ukupnih količina od približno 0,04—500 ccm CO_2. Najmanja količina CO_2, koja se može jednim mjerenjem odrediti iznosi oko 0,04 ccm = $3{,}57\cdot 10^{-6}$ gramekvivalenta CO_2. Smanjivanjem odnosno povećavanjem volumena apsorpcione otopine mogu se granice primjene znatno proširiti prema manjim odnosno većim količinama ugljičnog dioksida.

7. Izvršena su konduktometrijska određivanja ugljičnog dioksida mjerenjem promjene vodljivosti otopine barijeva hidroksida kod r a z l i č i t i h temperatura. Nađena je zavisnost konstante k od temperature.

8. U temperaturnom intervalu od 15°—37° C, koji praktički dolazi u račun za konduktometrijska određivanja ugljičnog dioksida, konstanta k je linearna funkcija temperature.

9. Izraz za računsko određivanje ugljičnog dioksida, uzevši u račun i promjene temperature, dobiva ovaj oblik:

$$a = \frac{mt' + n + C\cdot W_{(t')}}{W_{(t')}} - \frac{mt + n + C\cdot W_{0(t)}}{W_{0(t)}}.$$

U toj jednadžbi $W_{0(t)}$ je početni otpor apsorpcione otopine temperature t^0 C, $W_{(t')}$ je otpor apsorpcione otopine temperature t' nakon apsorpcije CO_2, C, m i n su konstante, nezavisne od temperature, a njihovo je fizikalno značenje pokazano.

Spomenute konstante mogu se lako odrediti baždarenjem pomoću poznate količine ugljičnog dioksida, uz dvije različite temperature.

Početne koncentracije apsorpcione otopine barijeva hidroksida mogu varirati u velikom intervalu već prema količini ugljičnog dioksida, koji se očekuje.

10. Praktički smisao dobiva spomenuta jednadžba onda, kad se temperatura apsorpcione otopine iz bilo kojih razloga ne može održavati konstantnom u vrijeme pokusa.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 18. IX. 1948.

AKADEMIK FRAN TUĆAN

PRINOS POZNAVANJU MINERALOŠKO-PETROGRAFSKIH PRILIKA JUGOISTOČNE MAKEDONIJE

Istražujući mineraloško-petrografske prilike Makedonije, vršio sam radove u jeseni g. 1940. u sjeveroistočnom dijelu lista Kavadarci (1 : 100 000) od Gornje Drčevice na jugu Demir-Kapije do Krk-Džamije na sjeveru od napomenutog mjesta, pa u sjeverozapadnom dijelu lista Strumica—Đevđelija (1 : 100 000) od sela Konče na sjeveru od Gradeške planine do Valandova na jugoistoku Konča.

Okolina Drena i Gornje Drčevice

Ova okolina sastavni je dio petrografskog kraja, o kome je već bilo govora u mojim izvještajima iz god. 1934.[1] i god. 1939.[2], pa u raspravi M. Tajdera o fiziografiji, kemijskom sastavu i genezi gabroidskoga masiva Dren—Boula.[3] Kraj na istoku od Drena i Kolniča prema Gornjoj Drčevici, pa dalje na zapad do Bošave nisam tada bio obišao. Zato sam zašao tamo u jeseni g. 1940. A zašao sam od Demir-Kapije idući uz Bošavu preko Budur-Čiflika, pa otuda uz Došnicu sve aluvijskim krajem, koji je, što uz Bošavu, što uz Došnicu, prekriven ovdje ondje silesijom nanesenih velikih valutica gabra. Tako dolazimo do ušća Drenske Reke u Došnicu. Ako otuda krenemo prema selu Drenu, možemo promatrati, kako aluvijski materijal leži na tercijarnim laporima, u koje je Drenska rijeka urezala svoje korito. Ti su lapori sastavni dio tercijarnih sedi-

[1] F. Tućan: Izvještaj o mineraloško-petrografskoj ekskurziji u Južnoj Srbiji. Vesnik Geološkoga instituta Kraljevine Jugoslavije, knj. IV/1, str. 17. Beograd 1935.

[2] F. Tućan: Izvještaj o mineraloško-petrografskom istraživanju Južne Srbije. Godišnjak Geološkoga instituta Kraljevine Jugoslavije, str. 25. Beograd 1939.

[3] M. Tajder: Fiziografija, kemijski sastav i geneza gabroidskog masiva Dren—Boula u Južnoj Srbiji. Rad Jugoslavenske akademije, knjiga 263, str. 1. Zagreb 1939.

menata Tikveškoga jezera, koji ovdje prestaju graničeći s vapnenjacima Krastavca i dijabazima Drena. Drenski dijabazi nalaze se uz lijevu obalu Drenske rijeke kao krajnji sjeverni obronci Ljutoga Ramena obrubljujući tako sa sjevera njegove gabroidske stijene. Gdjegdje su veoma metamorfozirani, kako se to osobito lijepo može promatrati u izbruscima pod mikroskopom. Tako se na pr. u dijabazima ispod sela Drena nalaze pojedine oveće česti toliko metamorfozirane, da ih, kad ih čovjek promatra golim okom, ne bi nikad smatrao za dijabaze. Gustoga su sastava, boje sive, zelenkastosive, mrkosive i smeđaste podsjećajući mnogo na serpentin. Ovako izlomljeni pokazuju na površini ovdje ondje smolastu sjajnost. Promatrajući ih u izbrusku pod mikroskopom, saznajemo, da je to doista bila nekad dijabazna stijena, koja se toliko metamorfozirala, da je prešla u kloritsku. Piroksenima, koji su uz plagioklas glavni sastavci dijabaza, nema više ni traga. Pri letimičnom pregledanju izbrusaka namjerio sam se samo na jedno zrno piroksena, pa i to u stanju raspadanja. Nepravilno je ispucalo, a pukotine su mu ispunjene kloritom, po čemu možemo zaključiti, da je sav klorit ove stijene proizvod raspadanja piroksena. Ima ga veoma mnogo, tako da stvara neke vrste osnovu, u kojoj leže bez reda rasprostranjeni stupićasti plagioklasi. Razvio se najviše u obliku vlakanaca, koja su duljinom optički pozitivna. Slaba su dvolomna. Pleohroizma su duljinom vlakanaca sivkastozelena i zelena, a u smjeru na to okomitom blijedožućkasta. Sav je taj klorit pun sitna crna zrnja, koje pripada možda magnetitu. — Plagioklas se razvio, kako je rečeno, u obliku stupića, kakve obično susretamo u dijabazima. I njega je raspadanje prilično zahvatilo, zbog čega je pun muteža. Negdje se razabiraju i sraslaci. Počešće se zapaža, kako je ovijen kloritom kao uzanom vrpcom, a i kroz sam plagioklas provlače se ponegdje kloritske niti. Na jednom individuumu oduljenom smjerom osi *a* iznosilo je koso pomračenje 13°, što bi odgovaralo kiselom plagioklasu iz grupe albita. — Osim spomenutih crnih zrnca magnetita (?) u kloritu nalazi se u stijeni još jedan opâki mineral u obliku zrna i sitnih heksaedara, koji pripadaju vjerojatno piritu.

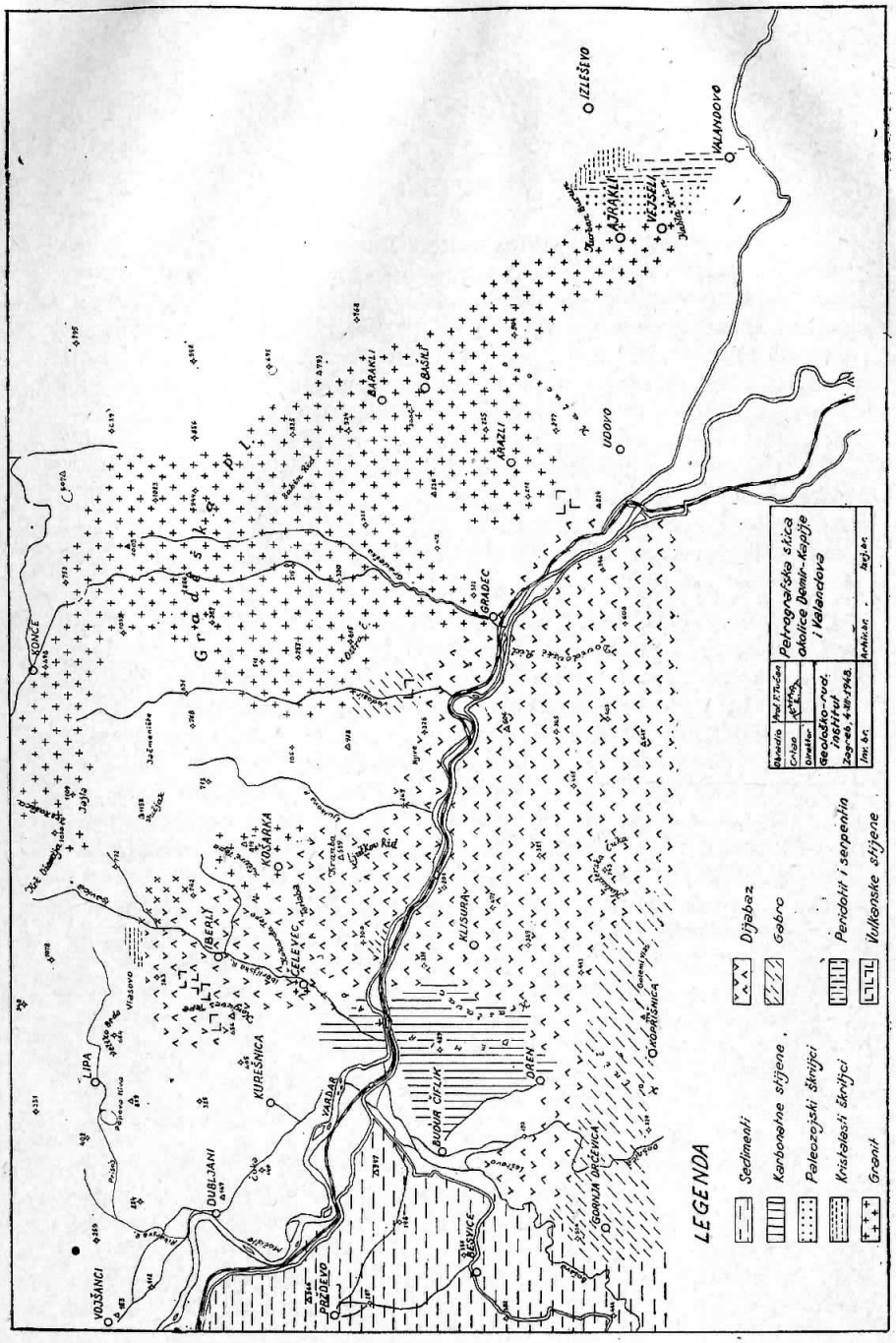
Fizičko-kemijski procesi, koji su doveli do metamorfoze ovoga dijabaza zanimljivi su zato, što je za njih vezana pojava elementarnoga bakra, koji se nalazi baš u onim dijelovima dijabaza, koje je zahvatila metamorfoza. Razvio se u tanahnim nitima i sitnim ljuščicama jasne metalne sjajnosti i bakarnocrvene boje. Počeli su ga i vaditi potkopom, ali je rad obustavljen. Iz potkopa izvađeno je i nešto malo siva

veoma sitnozrnata pješčenjaka, koji je obilno uprskan sitnim zrncima pirita. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da je sastavljen od zrnja kremena, između koga su se okupili listići sericita, te od mnoštva opâkih sitnih zrnaca i razvučenih zaobljenih kristalića pirita.

Još se u tom izvađenom materijalu nađe manjih komada kvarcita, u kojima se vide uprskana zrnca jednoga minerala jake metalne sjajnosti i sive boje, koja podsjećaju na željezni sjajnik. Kvarcit je sav napojen željeznim hidroksidom, od koga je smeđožut. U izbrusku pod mikroskopom vidi se uz pretežnu količinu kremenskih zrna dosta žućkastocrvenih limonitskih čestica okupljenih u hrpe. Prah toga kvarcita žaren sa sodom na ugljenu daje veoma jaku reakciju na hepar, što svjedoči, da se u njemu nalazi neki sulfidni mineral u znatnoj količini. Možda baš ona zrnca, što podsjećaju na željezni sjajnik, pripadaju nekom mineralu iz grupe sulfosoli, na pr. bakarnom sinjavcu (tetraedritu). To pitanje može da riješi samo detaljno istraživanje, naročito kemijska analiza.

Uz ovu bakronosnu raspadnutu dijabaznu stijenu, za koju sam rekao da spoljašnošću podsjeća znatno na serpentin, leže stijene jasna dijabazna lica. One su gusta sastava i mrkosive. U izbrusku pod mikroskopom razbira se, da su i one veoma metamorfozirane. Od prvobitne stijene kao da se uščuvala samo njena nekadašnja struktura. Raspoznaju se sitni prutićasti glinenci onakva kroja, kakav imaju u melafirima i bazaltima. Malne da su posve preobraženi, pa zato nepodesni za mikroskopska istraživanja. Neki su pretrpjeli potpunu kalcitizaciju prešavši u nakupinu sitna kalcitskoga zrnja. U nekima se zapaža osim zrnaca kalcita obilje sićušnih bezbojnih listića nekoga minerala, koji je znatna loma, a i dvoloma, sudeći po jakim interferencijskim bojama. Pirokseni su posve iščezli davši materijal za razvitak klorita, kojeg ima u izobilju. Obilan je i jedan opâki mineral, koji se nalazi u sitnom zrnju. Negdje se javlja u kristalnim skeletima, koji su karakteristični za magnetit, pa vjerojatno i pripadaju njemu. Kao sekundarni minerali sakupljaju se po pukotinama kremen i već napomenuti kalcit.

Drenu na sjeverozapadu diže se između Došnice i Bošave brdo Leštovo (u karti na idućoj stranici Leševo). Na njega se može uspeti idući od Budur-Čiflika prelazeći preko Došnice. Ona baš ispod Leštova zaobilazeći ga sa sjeverne strane utječe u Bošavu. Niži obronci Leštova prema BudurČifliku sagrađeni su od sedimenata, većinom konglomerata. Povrh njih javljaju se



Sl. 1. Petrografska skica okolice Demir-Kapije i Valandova

dijabazne stijene također dobrano metamorfozirane sa uščuvanom dijabaznom strukturom. Plagioklas preteže u stijeni, a razvio se u obliku kratkih uzanih prutića. Dosta je svjež. Na prerezima iz zone simetrije određen je kut simetrijskoga pomračenja, i to $7^0 : 7^0$; $8^0 : 13^0$; $16^0 : 14^0$. Lom svjetla manji je od loma u kanadskom balzamu, pa bi sve to svjedočilo za kiseli plagioklas iz grupe albita. Piroksena nigdje nema, ali je zato dosta klorita, koji je jamačno i postao od piroksena. Od sekundarnih minerala nađe se nešto malo epidota i po neko zrnce kremena. Opâkoga minerala ima mnogo.

Dijabazi tu brzo prestaju, pa ih zamjenjuju gabri. I to je stijenje ovdje na kontaktu sa dijabazom znatno metamorfozirano. Sastavljeno je od plagioklasa i piroksena. Plagioklas je toliko raspadnuo, da je pun muteža, pa je nepodesan za mikroskopsko istraživanje. Nema ga mnogo. Glavnu mineralnu masu sačinjava piroksen, dijalag, koji je ovdje ondje prilično uralitizovan. Uralit (amfibol) javlja se u prutićima, koji pokazuju pleohroizam, i to c = zelenkast, a u smjeru na to okomitom blijedozelenkast. Negdje je piroksen prešao u uralit, kome jedna polovina pokazuje napomenuti pleohroizam, a druga c = smeđ, a u smjeru na to okomitom blijedosmeđ. Kut kosoga pomračenja c: c = 17^0. Sudeći po proizvodima metamorfoze, bit će da se u ovom gabru razvio bio i rompski piroksen. Zaključujem to po tome, što se u izbrusku namjeri čovjek na vlaknasti serpentin, koji svojom pojavom podsjeća na serpentine postale iz hiperstena. Sačuvala se naime nekadašnja forma hiperstena, a mjesto njegove tvari razvila se serpentinska u obliku paralelno poređanih vlakanaca. Ona su slaba dvoloma, što se zapaža po slabim interferencijskim bojama. I pleohroizma su slaba: smjerom duljine vlakanca su slabašno zelena, a u smjeru na to okomitom nijansa zelene boje nešto je očitija. U serpentinu se nalaze poikilitski uklopljena zaobljena zrna od metamorfoze uščuvana dijalaga. U izbrusku se namjeri čovjek na nešto malo opâkoga minerala, koji će biti vjerojatno magnetit, jer stijena, iako slabo, djeluje na magnetsku iglu.

Prolazeći istočnom stranom Leštova, susretamo svuda gabroidske stijene, pa na jednoj bezimenoj čuki prema Došnici primaju one dijabazno lice. Jedne su mrkosive, sitnozrnasta sastava i veoma žilave. Neznatno su uprskane piritom. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da su sastavljene uglavnom od plagioklasa, piroksena i kremena. Plagioklas se razvio sad u uskim prutićima, kako je to obično u dijabazima, sad u

ošírokim prizmatski oduljenim kristaloidima bez terminalnih ploha, a u zoni prizme sa jasnim idiomorfizmom poput plagioklasa u gabrima. Prilično je uščuvan, iako je ponegdje znatno pomućen sitnim prahom kao proizvodom metamorfoze. U njemu se nalaze često sitna zrna piroksena i zeleni klorit. Lom svijetla manji mu je od loma u kanadskom balzamu. Na jednom prerezu iz zone simetrije iznosilo je simetrijsko pomračenje $10^0 : 10^0$, pa bi to bio prema tome plagioklas iz grupe albita. P i r o k s e n je dosta rasprostranjen. Negdje je bezbojan, negdje slabašno smeđast. Sav je nepravilno raspucao, pa su mu neke česti već preobražene u klorit. K r e m e n zaostaje količinom za plagioklasom i piroksenom. To su alotriomorfna zrna, koja se već na prvi pogled raspoznaju od plagioklasa time, što nisu pomućena prahom. Na nekima se jasno moglo odrediti, da su optički pozitivni i jednoosni. U izbrusku se vidi prilično opâkoga minerala većinom u obliku kristalnih skeleta, pa kako stijena reagira, iako neznatno, na magnetsku iglu, jamačno ti kristalni skeleti pripadaju m a g n e t i t u. Od sekundarnih minerala rasprostranjen je k l o r i t. Sudeći po mineralnom sastavu, ova bi vrsta stijene pripadala dioritskoj grupi, što bi, dakako, najpouzdanije potvrdila kemijska analiza.

Druga vrsta stijene sa ove bezimene čuke nalazi se neposredno uz napomenutu dioritsku stijenu. Sastava je sitnozrnasta i tamnosive boje. U njoj se golim okom razabiraju glinenci većinom kao uzani prutići, koji blistaju staklastom sjajnošću. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da je to tipski gabro. Sastavljen je uglavnom od plagioklasa i piroksena. P l a g i o k l a s je malne posve svjež, a razvio se u oširokim prizmatski oduljenim kristaloidima iz grupe bitovnita, kako je to određeno na jednom sraslacu trojku Fjodorovljevom metodom na univerzalnom mikroskopu. Količina anortitske tvari nađena je u tom glinencu u vrijednosti od 74%. A i na običnom polarizacijskom mikroskopu utvrđena je također bazična priroda tih glinenaca, jer je u zoni simetrije na prerezu jednog sraslaca iznosilo simetrijsko pomračenje $30^0 : 30^0$, što bi svjedočilo za plagioklas iz grupe labradora sa 56% *an*. P i r o k s e n je dijalag. Na jednom individuumu zapaženo je koso pomračenje sa 41^0. Najviše se nađe njegovih individuuma, koji su negdje više, a negdje manje amfibolitizirani, pa je taj amfibol ili vlaknat ili listićav. Vlaknati pokazuje pleohroizam c = modrušastozelen, a u smjeru na to okomitom blijedožut, dok je listićavi svojim pleohroizmom nalik na biotit, t. j. c = smeđ, okomito na to blijedožut. U izbrusku se nađe nešto malo opâkoga minerala

u obliku kristalnih skeleta, a pripada jamačno m a g n e t i t u, jer stijena nešto malo djeluje na magnetsku iglu. Ima i nešto k l o r i t a.

Kroz ove gabre provlače se žile jedne sitnozrnaste stijene mrkozelene boje. Negdje te mrkozelene stijene leže na gabrima kao pokrovi. Obično su impregnirani halkopiritom. U izbrusku pod mikroskopom možemo se osvjedočiti, da ne pripadaju među eruptivne stijene, nego u kristalaste škriljce, i to u kloritsko-epidotske. U jednom takvom škriljcu, što se kao žila provlači kroz gabro, a gdjegdje je i kuglasto izlučen, razbira se u izbrusku pod mikroskopom, da je sastavljen uglavnom od klorita i epidota. K l o r i t se razvio u vlaknatim nakupinama. Vlakanca su najviše različno savijena. Smjerom duljine optički su pozitivna i prilično uočljiva pleohroizma, pa su duljinom zelena, a u smjeru na to okomitom blijedožuta. E p i d o t se javlja u nepravilnom zrnju ili u prutićastim individuima, koji se kadikad sabiraju u radijalne nakupine. G l i n e n a c, koji se također razvio u stijeni, mnogo zaostaje iza ova dva minerala. Prilično je uščuvan, tako da je samo nešto malo natrunjen sitnim zrncima kao prahom. Najviše je prutićasto oduljen, čime podsjeća na plagioklase u dijabazima. Ima ga u nepravilnom zrnju. Loma je slabijega od onoga u kanadskom balzamu. Na jednom prerezu iz zone simetrije iznosilo je simetrijsko pomračenje $13^0 : 13^0$. Prema tome bio bi to kiseli plagioklas iz grupe albita sa 10% *an*. Namjeri se čovjek u izbrusku i na nepravilna zrna k r e m e n a. Ona su sabrana u pukotinama stijene, u koje zalaze individuumi epidota s oštro oivičenim terminalnim plohama. Na taj način zadire epidot krajevima svojih kristala u kremen, a neki se individui epidota nalaze posve uklopljeni u kremenu. Opâki je mineral dosta rasprostranjen. Jedan njegov dio pripada jamačno h a l k o p i r i t u, koji se i golim okom vidi uprskan u škriljcu, a drugi, onaj u kristalnim skeletima, vjerojatno m a g n e t i t u, od kojega stijena djeluje na magnetsku iglu.

Još ćemo naići u ovim gabrima na kristalaste škriljce, ako se samo uputimo od napomenute bezimene čuke stazom, što vodi do potkopa u bakarne rude tamo iznad lijeve obale Došnice, nekako nasuprot Aramijskom dolu, potočiću, što utječe s desne strane u Došnicu dolazeći s Kolniča. Da nazovem to mjesto s potkopima b a k a r n i m r u d n i k o m. Tu su se razvili sivi sitnozrnati gabri, pa u izbrusku jednoga od njih vidimo, da je najpretežnijom česti sastavljen od p l a g i o k l a s a, koji su negdje više, negdje manje natrunjeni sivim prahom kao proizvodom metamorfoze. Pri letimičnom pregledanju od-

redio sam na jednom prerezu iz zone simetrije simetrijsko pomračenje 35⁰ : 35⁰, što bi svjedočilo za bazični glinenac iz grupe labradora sa 63% *an*. Uz plagioklas razvio se još a m f i b o l većinom u obliku prutićastih nakupina. Pomrači pod kutom od 21⁰. Pleohroizam mu je prilično uočljiv: a = blijedožućkast, b = c = sivkasto ili modrušastozelen. Često se nalazi uklopljen u plagioklasu, pa se nađe negdje i kao uzana lamela, kako se provlači plagioklasom paralelno sa sraslačkim lamelama. Od sekundarnih minerala namjeri se čovjek i na pokoje zrno e p i d o t a.

Ima u tom »bakarnom rudniku« među gabrima i takvih, koji su dijabazna lica, pa oni i u izbrusku pod mikroskopom formom svojih p l a g i o k l a s a podsjećaju na plagioklase u dijabazima. Razvili su se naime u obliku prutićastih sraslaca. Prutići su ovdje ondje malo savijeni, a svi pokazuju uočljivo valovito pomračenje, koje dosta smeta pri određivanju optičkih osobina. Neki su znatno pomućeni sivim trunjem. P i r o k s e n je veoma rasprostranjen. Boje je sivkastosmeđe. Na jednom individuumu zapažen je kut kosoga pomračenja od 40⁰. Vidi se i nešto k l o r i t a u vlaknatim nakupinama, pa vrlo malo a m f i b o l a s pleohroizmom a = žućkastosmeđ, b = smeđ, c = mrkozelen. Namjeri se čovjek i na koje zrno e p i d o t a.

U tim gabrima i gabroidskodijabaznim stijenama, u kojima se nalaze potkopi u bakarnu rudu, javljaju se amfibolitske stijene. One su baš glavne nosilice bakarnih ruda, halkopirita i malahita. H a l k o p i r i t je obilno uprskan u amfibolitu, a i m a l a h i t a je vrlo mnogo. Ovaj posljednji mineral razvio se ili u gustoj masi ili u sitnim iglicama i vlakancima, koja su obično lepezasto okupljena. Negdje se okuplja i u sitnim bradavicama, koje se lijepo razbiraju pomoću lupe.

Amfiboliti su se razvili kao epidotski, a najviše bez glinenca. Kadikad svojom spoljašnošću naliče više na serpentin negoli na amfibol. Takvi su baš oni, u kojima je iskopan potkop. Gusta su sastava, zelenkastosivi, a pod udarcem čekića vrlo se lako lome i raspadaju u nepravilne komade oštrih bridova sjajući se ovdje ondje na površini poput onih drenskih metamorfoziranih dijabaza, u kojima se nalazi elementarni bakar. Drugi su sitnozrnata sastava i mrkosivi ili zelenkastosivi. U izbrusku pod mikroskopom ističe se kao pretežni mineralni sastavak a m f i b o l. Javlja se u vlasastim ili sitnoprutićastim nakupinama sa kosim pomračenjem od nekih 20⁰. Pleohroizam mu je prilično uočljiv a gotovo bezbojan ili blijedožućkast, b = c = sivkastozelen. I e p i d o t a ima mnogo, iako manje od amfibola. Javlja se obično u nepravilnom zrnju, rjeđe

u prutićima, koji se kadikad lepezasto okupljaju. Optički je pozitivan. U nekima se nalazi još i nešto malo k r e m e n a, u nekima k l o r i t a.

Među ovim amfibolitskim stijenama ima i takvih, koje svojom strukturom i plagioklasima podsjećaju na dijabaz, što bi nas moglo navesti na misao, da su ti amfiboliti postali metamorfozom iz dijabaza. Oni su naime sastavljeni, kako se to razbira u izbrusku pod mikroskopom, od pretežnoga p l a g i o k l a s a najviše u obliku prutića. To je kiseli plagioklas iz grupe albita, jer mu je lom svijetla manji od loma u kanadskom balzamu, a na jednom prerezu iz zone simetrije iznosilo je simetrijsko pomračenje 11⁰ : 12⁰. Iza plagioklasa ima najviše a m f i b o l a u prutićastim individuima, koji se gdjegdje okupljaju u lepezaste agregate. Pomrači pod kutom od 24⁰. Pleohroizam mu je c = sivkastozelen, a u smjeru na to okomitom ista boja samo u slabijoj nijansi. Ima prilično i k l o r i t a, pa nešto malo e p i d o t a, k r e m e n a i k a l c i t a.

U ovom »bakarnom rudniku« razvio se uz amfibolite i epidotski kloritski škriljac veoma bogato impregniran halkopiritom, pa je u njemu otvoren potkop za vađenje napomenute bakarne rude. I on svojom spoljašnošću, poput drenskih dijabaza, podsjeća na serpentin. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da je pretežnom česti sastavljen od k l o r i t a, koji se razvio u sitnim listićima i još više u vlaknatim nakupinama slabozelenkaste boje i slaboga dvoloma. Uz klorit javlja se u velikoj količini e p i d o t, a od opâkih minerala h a l k o p i r i t u obliku nepravilna krpasta zrnja i jasnih kristala oštrih obrisa, koji su negdje kao nagrizeni, a negdje nepravilno izrezuckani.

Ako se s ovoga »bakarnoga rudnika« spustimo u nedaleku Došnicu, naići ćemo na njenoj lijevoj strani na uralitizirani gabro sa uprskanim halkopiritom. U toj se stijeni nalazi tek započeti potkop kao istražni rad na bakarne rude. Svojom spoljašnošću podsjeća stijena na serpentin. U izbrusku pod mikroskopom zapaža se, da preteže amfibol (uralit), koji se javlja u prutićastim i vlaknatim nakupinama. Vlakanca pomrače pod kutom od 17⁰. Pleohroizam je dosta slab c = slabozelenkast, a u smjeru na to okomitom gotovo bezbojan. P l a g i o k l a s a je također mnogo. To su oširoki kristaloidi, ali toliko pomućeni od metamorfoze, da im je optičko istraživanje otežano. E p i d o t je rijedak, a od opâkoga minerala nalazimo halkopirit u zrnju, koje je na različne načine kao izgrizeno.

Ovaj dio gabroidskog (i dijabaznoga) masiva znatno je metamorfoziran, i to baš u onim dijelovima, gdje se u njemu javljaju elementarni bakar, halkopirit i malahit. Procesi meta-

morfoze doveli su do razvitka amfibolita (uralita) i klorita. Vjerojatno je, da je sama metamorfoza bila vezana za pneumatolitske i hidrotermalne pojave, kojih je posljedica bio razvitak napomenutih bakarnih ruda, pa uralitizacija i kloritizacija piroksena.

Idući preko Leštova putem, koji vodi iz Budur-Čiflika u Gornju Drčevicu, prolazimo najprije dijabazima, da doskora zađemo u gabre. Oni se prostiru prema Gornjoj Drčevici. I u njima ćemo se namjeriti na amfibolite, i to uz potočić Leštovski dol (to mu ime nije označeno na karti), što se spušta prema Bošavi s njene desne strane. U izbrusku pod mikroskopom možemo se osvjedočiti, da je taj amfibolit, koji je siv i sitnozrnasta sastava, sastavljen od malne samoga amfibola. To su kratko stupićasti vlaknati agregati s pleohroizmom c = zelenkastosiv, a u smjeru na to okomitom blijedožućkast. Na nekoliko vlakanaca određen je kut pomračenja u iznosu od 20°. Epidota je malo, a razvio se u sitnom nepravilnom zrnju. Optički je pozitivan. Klorita je nešto više od epidota, a okuplja se po šupljinicama u vlaknatim agregatima, koji su obično vijugasto svinuti. Vlakanca su duljinom sivkastozelena, a u smjeru na to okomitom iste boje samo slabije nijanse. Glinenac je veoma rijerak, pa se nađe pokoji sitni sraslac posve svjež. Na jednom takvom iz zone simetrije iznosilo je pomračenje 12° : 13°.

Gabri, u kojima se nalazi ovaj amfibolit, dobrano su metamorfozirani, kako se to jasno razbira u izbrusku pod mikroskopom. Uglavnom je sastavljen od plagioklasa, piroksena i amfibola. Plagioklas se razvio većinom u obliku dugačkih prutića, a nešto manje u oširokim oduljenim kristaloidima. Negdje su njegovi prutići malo savijeni. Dosta je pomućen trunjavim proizvodima metamorfoze. Obično pomrači valovito, što otežava optičko istraživanje. Piroksen je prilično uščuvan. Tamo, gdje je počeo da se metamorfozira, prelazi u uralit. Na nekima je zapaženo koso pomračenje s kutom od 38°. Amfibola (uralita) ima vrlo mnogo. Javlja se u prutićastim i vlaknatim nakupinama s kosim pomračenjem od 14°. Pleohroizam mu je a = blijedožućkast, b = c = sivkastozelenkast.

Od opâkih minerala zapažaju se zrna halkopirita, koji se i golim okom vidi u toj stijeni uprskan u obliku sitnog zrnja.

Među ovim gabrima u samom potočiću Leštovski dol, baš na mjestu, gdje ga presijeca put u Gornju Drčevicu, razvila se znatna količina vrlo krupnozrnaste zelenkastosive stijene, za

koju bi čovjek rekao, kad je promatra golim okom, da je sastavljena od samih krupnih zelenkastosivih piroksena. No u izbrusku pod mikroskopom vidi se, da je sastavljena od velikih kristaloida plagioklasa i amfibola. Plagioklas je pomućen sitnim trunjem, među kojim se nalazi zelenih listića klorita. Bit će da pripada bazičnom nizu iz grupe labradora, budući da se na jednom prerezu s izlazom pozitivne raspolovnice na strani vidnoga polja, moglo odrediti koso pomračenje sa 62°. Amfibol je dvojak. Jedan je nesumnjivo primaran, jer se razvio u kristalima, koji na poprečnom prerezu pokazuje heksagonske obrise. Takvi su jakoga pleohroizma: a = smeđast, b = c = tamnosmeđ. Drugi je prutićast, pa se negdje vidi, kako je postao uralitizacijom iz piroksena. U takvima naime uščuvalo se nešto malo piroksenske tvari. Pleohroizma su slaba, i to: a = modrušastozelen, a u smjeru na to okomitom gotovo bezbojan. Od sekundarnih minerala nađe se nešto malo klorita.

Uspevši se iz Leštovskoga dola na brdo s lijeve strane puta idući prema Gornjoj Drčevici (to brdo zovu Crvena zemlja, kojega imena nema na karti), nalazimo se među vrlo krupnozrnastim gabrima. Ti su gabri utoliko zanimljivi, što su bogato impregnirani malahitom i azuritom. Malahita je više nego azurita, a obično se sabrao u igličaste radijalne nakupine, dok se azurit nalazi u nakupinama sićušna zrnja. U materijalu, koji je na Crvenoj zemlji izvađen pri istražnim radovima, vidi se, da je tih bakarnih ruda vrlo mnogo, što nas upućuje na zaključak, da je ovdje mineralizacija krupnozrnasta gabra dobila znatne razmjere.

Sa Crvene zemlje brzo dolazimo do suha potoka, što ga zovu Vlaovcem (to ime nije u karti uneseno). Dakako, i tu se rasprostranio gabro gdjegdje s dobro uščuvanim plagioklasima. Piroksena je u njima mnogo. Obično se uz pukotine kalavosti sav raspao kao u neke vrste prutićasti agregat. Ponegdje se vidi, kako prelazi u amfibol, koji se nalazi u izbrusku u neznatnoj količini. S obzirom na pleohroizam amfibol je dvojak. Kod jednoga je c = svijetlosmeđ, okomito na c = žućkast, kod drugoga je c = modrušastozelenkast, okomito na c = gotovo bezbojan; onaj prvi pomrači pod kutem od 20°, a ovaj drugi pod kutem 16°.

Tu, u gornjem toku Vlaovca, gabro je pretrpio opsežnu metamorfozu, tako da je skoro sav kaoliniziran. I baš u tim kaoliniziranim dijelovima došlo je do znatne mineralizacije, uz koju se razvio malahit i azurit u društvu sa limonitom. Te

se rude nalaze u obliku tanjih žila, što se na sve strane provlače kaoliniziranim gabrom. Negdje su žile samo od malahita, negdje od limonita, koji je sav impregniran azuritom i malahitom. U tim metamorfoziranim gabrima vršeni su istražni radovi na bakarne rude, pa se u izvađenom materijalu nalazi toliko tih ruda, te čovjek po nekim metamorfnim pojavama dolazi do zaključka, da se tu razvilo znatno bakarno rudište.

Ispod ovoga bakarnoga rudišta leži Gornja Drčevica, smještena na gabrima, koje možemo slijediti idući putem prema Strmaševu. Te se stijene vuku na zapad prema Bošavi, pa ćemo se na njih namjeriti u potočiću Vuček (ime mu nije uneseno u kartu), što se ispod Glave spušta u Bošavu. Po svom sastavu i metamorfnim pojavama jednake su dosad napominjanim gabrima. Dolje uz potočić vide se veoma raspali gabri, a na njima debele naslage sedimenata s mnoštvom velikih valutica. Na desnoj strani uz potočić nešto više raspalih gabra nalazi se peridotit. I on je zahvaćen metamorfozom. P i r o k s e n njegov uglavnom je amfibolitiziran, pa je samo malo ostalo uščuvano njegove tvari, koja je bezbojna, a pomrači pod kutem od 37°. A m f i b o l a je mnogo. Onaj kratko prutićasti skoro da je bezbojan, pa i ne pokazuje pleohroizma; onaj u oduljenim kristaloidima, koji su se raspucali prutićasto, pokazuje pleohroizam c = svijetlosmeđ s prijelazom u putenastu boju, a u smjeru na to okomitom ista boja samo u slabijoj nijansi. O l i v i n a je u stijeni bilo mnogo, no sad je većinom serpentiniziran.

Na tom peridotitu leži uralitizirani gabro, koji je pretežnom česti sastavljen od uralita (amfibola) i nešto malo od krupnijih kristaloida plagioklasa gdjegdje pomućenih smeđim prahom kao proizvodom metamorfoze. Među tim uralitiziranim gabrima ima ih i sa prilično uščuvanim piroksenima, ali sa vrlo raspalim plagioklasima. U njima se nađe nešto malo uprskana halkopirita. Niže u potoku prema Bošavi javljaju se amfiboliti. Ovdje preko Bošave putem između Barova i Besvice zalaze gabroidske stijene pod tercijarne sedimente Tikveša.

Ovo je samo letimični prikaz petrografskih prilika okoline Drena i Gornje Drčevice. Za točno upoznavanje prirode tamošnjih stijena bit će potrebno njihovo detaljno mikroskopsko istraživanje i njihove kemijske analize. Tim će se putem doći i do objašnjenja metamorfnih pojava, koje su u ovom kraju velikih razmjera, i do objašnjenja geneze bakarnih ruda, za koje smo vidjeli da su mnogo rasprostranjene.

Kristalne stijene s lijeve strane Vardara između Demir Kapije i Valandova

Brdski kraj s lijeve strane Vardara između Demir-Kapije i Valandova nije baš lagodan za istraživanje. U prvom redu on je gotovo bez naselja. Postoje dva mala muslimanska seoceta uz Iberlijsku Reku, Čelevec i Iberli, pa na istoku od njih u brdima porušeno muslimansko seoce Košarka sa cigle četiri kuće. Otuda na istok nigdje naselja do Gradec-sela na Vardaru. Tek od Udova prema Valandovu uz dolinu Vardara ima nešto većih naselja, ali je brdski kraj otuda prema sjeveru veoma slabo naseljen, pa se tu teško dođe do konačišta. Osim toga u tamošnja brda možemo da zađemo samo preko Vardara više Demir-Kapije zatim kod željezničke stanice Klisura i još niže kod željezničkog mosta preko Vardara prema Gradecselu, odnosno prema željezničkoj stanici Strumica (Udovo). U drugom redu izbijaju poteškoće u samom petrografskom sastavu tamošnjih brda. Taj se sastav naime često mijenja, pa bi bilo potrebno, tako reći, korak po korak obilaziti silesiju onih brda i čuka, da se dobije potpuna slika rasprostranjenja tamošnjih stijena, koje su veoma različne; jer tamo su se razvile karbonatske stijene, dijabazi, gabri, amfiboliti, serpentini, perodotiti, andezitske i granitske stijene, pa glineni škriljci.

Ja sam zašao u ta brda preko Vardara više Demir-Kapije preko sela Kurešnice (u karti Korešnica). Idući od toga sela prema koti 405 nailazimo na sedimente sastavljene od konglomerata. Više njih na brdu Meterize (u karti nije uneseno) javljaju se stijene dijabazna (melafirna) lica, guste, mrkosive sa neznatnim prijelazom u crvenkasto. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da su sastavljene uglavnom od plagioklasa i klorita. P l a g i o k l a s se razvio najviše u obliku kratkih uzanih prutića, kako je to obično kod melafira odnosno bazalta. Veoma je trošan, zbog čega je pomućen sitnim trunjem. Između prutićastih plagioklasa nalazi se k l o r i t kao proizvod metamorfoze piroksena, koji je u stijeni posve iščezao. Sakuplja se u društvu sa kremenom i po okruglastim šupljinicama, koje se nalaze u stijeni. Negdje su te šupljinice, iako rijetko, ispunjene k a l c i t o m. One su, kako je poznato, dosta česte u melafirskim stijenama, pa ispunjene mineralnim tvarima stvaraju t. zv. mandulastu strukturu u melafirima (i dijabazima). Mnogo je u toj stijeni opâkoga minerala, koji je vjerojatno pripadao magnetitu, no sada je limonitiziran. Vidi se u nepravilnom zrnju i heksaedrima. Negdje je to zrnje crvenosmeđe.

Više ovih melafirskodijabaznih stijena sa zapadne strane Konjuves Tepe javljaju se guste sive stijene andezitskoga lica. U izbrusku pod mikroskopom jasno se razabira tipska hijalopilitska struktura, iako je stijena veoma metamorfozirana. U osnovi leže kao utrusci idiomorfno iskristalizirani glinenci u pločastim presjecima posve pomućeni od proizvoda raspadanja. Od feromagnezijskih silikata nije ništa ostalo. Osnova je puna sitnih glinenčevih mikrolita, pa nekoga smeđastoga muteža i sitnog zrnja kremena, koji je osim toga okuplja u sitnim okruglim šupljinicama, što leže u osnovi.

Ove stijene andezitskoga lica zapremaju mali prostor, tako da uskoro idući zapadnom stranom Konjuves Tepe u smjeru prema Vlasovu nailazimo opet na melafirske stijene poput onih na Meterizima. Među njima nađe se dijelova s izrazitom mandulastom strukturom: u gustoj naime tamnosivoj osnovi leže bijele pjege, koje potječu od šupljina većinom okruglih, a ispunjenih bijelom mineralnom tvari, najviše kalcitom. U izbrusku pod mikroskopom upada u oči tipska struktura, kojom se odlikuju bazalti i melafiri. U osnovi leže bez reda rasuti najviše igličasti ili uzano prutićasti plagioklasi prilično uščuvani. Sudeći po jakosti dvoloma, pripadaju grupi albita. Beckeova naime linija kod tih plagioklasa, jasno se razbira: zalazi dizanjem tubusa u kanadski balzam, a spuštanjem u plagioklas. Osnova je puna sitnog magnetitskog zrnja i njegovih kristalnih skeleta, zbog čega ta stijena djeluje na magnetsku iglu. Još se u osnovi nalazi malo klorita, pa zrnaca kalcita i kremena. Okruglaste šupljine ispunjene su pretežnom česti kalcitom i nešto malo kloritom. Kremen se kadikad razvio u kristalima oštrih obrisa, pa se od njega vide poprečni presjeci u obliku malo razvučenih heksagona.

Prema Vlasovu, tamo na sjeverozapadu iznad sela Iberli, prestaju melafirske stijene, pa se javljaju guste smeđastosive eruptivne stijene, u kojima se u izbrusku pod mikroskopom zapaža, da su sastavljene uglavnom od plagioklasa i kremena. Plagioklas je veoma obilan, a razvio se u kratkim uzanim prutićima gotovo mikrolitskoga kroja. Negdje se vidi, kako su štapići poređani kao u neke vrste nizova, što podsjeća na fluidsku strukturu kod efuzivnih stijena. Znatno je metamorfoziran, pa je ispunjen sitnim zrncima, koja pokazuju jak lom i znatan dvolom sudeći po dosta živim interferencijskim bojama. Između tih glinenaca iskristalizirao se kremen u sitnom nepravilnom zrnju. Kremen se još sabira i u obliku nešto krupnijega zrnja po šupljinama obično u društvu jednoga vlaknatog minerala, koji se okuplja često u radijalne agregate. Vlakanca su

sićušna, kratka, pa je teško odrediti njihovu prirodu. Vidi se, da su duljinom optički pozitivna, da su jakoga loma i ne baš slaboga dvoloma. U izbrusku se češće namjerimo i na sitne heksaedre pirita i na poprečne heksagonske prereze apatita.

Ove kremenom bogate eruptivne stijene zapremaju znatan prostor. No idući preko Vlasova prema gornjem toku Iberlijske Reke ili točnije prema potočiću Igovici, što dolazi sa Krk-Džamije, nailazimo na velike količine amfibolita. To su sive stijene negdje sitnozrnasta, gotovo gusta sastava, pa se takve u izbrusku pod mikroskopom vide, kako su sastavljene najpretežnijom česti od sitnoga ksenoblastičnoga amfibola. Na njemu je zapaženo koso pomračenje od 20° i pleohroizam c = sivkastozelen, okomito na c = žućkastozelenkast. Glinenca je mnogo, iako količinom zaostaje za amfibolom. Razvio se u sitnim ksenoblastičnim zrncima, koja toliko podsjećaju na kremen, da se tek u konvergentnom svijetlu razlikuju od njega svojom optičkom dvoosnošću. Još se uz veliko uvećanje (objektiv 9, okular 3) vide u izbrusku veoma sitna zaobljena zrnca žućkaste boje i jaka loma te znatnih interferencijskih boja, za koje bih rekao da pripadaju epidotu.

Negdje su ti amfiboliti izrazitijega sitnozrnatoga sastava. U izbrusku pod mikroskopom razabira se, da su sastavljeni, dakako, od krupnijih individuuma ksenoblastična amfibola, koji je dosta uočljiva pleohroizma c = modrušastozelen, okomito na c = žućkastozelen. Kut pomračenja iznosi 17°. Glinenac znatno zaostaje za amfibolom, a razvio se u ksenoblastičnom zrnju, koje podsjeća na zrna kremena. U izbrusku vidi se još prilično epidota i kalcita, pa magnetita (stijena djeluje na magnetsku iglu), koji je većinom u nepravilnom zrnju izrezuckanih, nepravilno nazubljenih obrisa. Još se čovjek može namjeriti na pokoje zrno hematita i na sitni apatit.

Ima dijelova u ovim amfibolitima, gdje se glinenac razvio u ovećem zrnju, tako da se svojom bjelinom ističe između blistavih mrkosivih amfibola, pa je stijena šarena poput gabra. Takvi su nešto izrazitijega zrnatoga sastava. U izbrusku pod mikroskopom prepoznaju se glavni mineralni sastavci: amfibol, plagioklas i kremen. Amfibol se razvio u krupnijim ksenoblastičnim individuima sa uočljivim pleohroizmom a = gotovo bezbojan, b = c = modrušastozelen. Kut pomračenja iznosi 16°. Negdje su mu individuumi u zoni prizme idioblastični. Plagioklas mnogo zaostaje iza amfibola. Javlja se u ovećim kristaloidima, koji su u zoni prizme prilično idioblastični.

Vide se obično u kratko oduljenim pločastim presjecima kao polisintetski sraslaci. Obično su pomućeni proizvodima raspadanja, među kojima se raspoznaju i zrna kalcita. Loma su nešto većega od loma kanadskog balzama. Na jednom presjeku iz zone simetrije iznosilo je simetrijsko pomračenje $22^0 : 25^0$, što bi svjedočilo za andenzin sa 43% *an.* K r e m e n se razvio u ksenoblastičnom zrnju, pa i on znatno zaostaje za amfibolom. Zrna su mu posve čista, a u konvergentnom svijetlu pokazuju se optički pozitivna i jednoosna. U izbrusku se još zapažaju sitna zrnca i heksaedri jednoga opâkoga minerala, kako se okupljaju u amfibolu. Možda pripadaju p i r i t u, jer stijena ne djeluje na magnetsku iglu. Zapaženo je nešto malo k l o r i t a i crvenih zrnca h e m a t i t a.

Još ću napomenuti među ovimi amfibolitima i one, koji svojom spoljašnošću ne naliče na amfibolite. To su zelenkastosive guste stijene, koje se pod udarcima čekića, istina, lome pločasto, ali se odlomljene ploče lako kidaju u nepravilne komade oštrih bridova. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da je ta sitnozrnasta stijena sastavljena uglavnom od glinenca i amfibola. G l i n e n a c preteže nad amfibolom. Sav se razvio u sićušno nepravilnom zrnju, pa kako je najviše bez sraslaca, toliko naliči na zrnca kremena, da se tek u konvergentnom svijetlu očituje kao optički dvoosan mineral. Negdje se čovjek namjeri, iako veoma rijetko, na pokoje zrnce sa sraslačkim lamelama, pa je na jednom presjeku iz zone simetrije opaženo simetrijsko pomračenje $20^0 : 18^0$, što bi odgovaralo plagioklasu iz grupe andezina sa 35% *an.* Lom svijetla nešto je veći od loma u kanadskom balzamu. A m f i b o l se razvio u sićušnim ksenoblastičnim listićima, koje tek uz veliko uvećanje možemo točnije da promatramo. Kut kosoga pomračenja iznosi 18^0, a pleohroizam je na nekim listićima, na kojima se vidi izrazita prizmatska kalavost, prilično uočljiv c = smeđast, okomito na c = blijedožut.

Spuštajući se u potok Igovicu nailazimo iza ovih amfibolita na dioritske stijene zrnata sastava, u kojima se golim okom raspoznaju njegovi glavni mineralni sastavci, glinenac i amfibol. U izbrusku pod mikroskopom zapaža se, da se glinenac razvio kao plagioklas u ovećim kristaloidima, koji su u presjecima pločasti i malo oduljeni. Pokazuje vrlo uočljivu lupinastu građu i valovito pomračenje. Neki su čak i izlomljeni, što sve svjedoči, da su bili izvrženi velikom pritisku. I a m f i b o l se razvio u krupnim kristaloidima. Na nekima je zapaženo koso pomračenje sa kutom od 20^0. Pleohroizam je prilično jasan a = blijedožut, b = c = muzgavozelen.

Uspinjući se od Igovice prema Krk-Džamiji, nailazimo oko Krk-Džamije na granitske stijene, koje možemo svuda da promatramo putem prema selu Ljubnici (sekcija Plačkovica). To su zrnate stijene sastavljene uglavnom od glinenaca i kremena. U onima na jugoistočnoj i istočnoj strani Krk-Džamije pretežu glinenci, koji su slabašno ružičasti, pa je i sama stijena dobila tu boju. U izbrusku pod mikroskopom zapaža se, da su ti minerali vrlo pomućeni od proizvoda metamorfoze. Njihovu prirodu odredit će detaljno optičko i kemijsko istraživanje. Pri ovom letimičnom pregledanju njihovih izbrusaka može se utvrditi, da su manjega loma svijetla od loma kanadskog balzama. Plagioklasi, dakle, kojih ima u tom granitu malo, pripadaju a l b i t u, a od kalijskih glinenaca zapaža se m i k r o k l i n, koji se prepoznaje po pertitskom sraštenju, iako je ono slabo uočljivo. Dok se plagioklas razvio u pločasto oduljenim kristaloidima manje ili više u zoni prizme idiomorfno, dotle je mikroklin najviše alotriomorfan. K r e m e n zaostaje količinom nešto malo iza glinenaca. Sav se razvio u alotriomorfnom zrnju, kako je to redovno kod granitskoga kremena. U stijeni je bilo i nešto malo liskuna (tinjca), i to biotita. No kako je metamorfoza znatno zahvatila glinence, tako je zahvatila i biotit, koji je potpuno kloritiziran. Na nekoliko vlaknatih agregata, na koje se čovjek u izbrusku namjeri, zapaža se jasan pleohroizam: u smjeru vlakanaca zelen, a u smjeru na to okomitom blijedožućkast.

Ima među ovim granitskim stijenama i dijelova, koji su veoma svježi, kao što su na primjer oni sa Drskašice, preko koje vodi put u Ljubnicu i dalje u Konče. U takvima su glinenci posve uščuvani, pa se u njima nalazi uščuvan i biotit sa poznatim pleohroizmom između crvenosmeđe i blijedožute boje. Nađe se tu još jedan mineral jaka loma i zamjetljiva pleohroizma: smjerom pukotina kalavosti je zelenkastosivkast, okomito na pukotine kalavosti blijedoputenast. Detaljna optička istraživanja riješit će njegovu prirodu. Te granitske stijene možemo pratiti svuda sa Drskašice putem u Ljubnicu i po sjevernim obroncima između Ljubnice i Konča.

One su uopće u ovom kraju veoma rasprostranjene. Uglavnom izgrađuju Gradešku Planinu, pa sam u njih zašao iz sela Konče putem u Gradec preko Studenca. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da su im glavni mineralni sastavci glinenac i kremen. G l i n e n a c je najviše kalijski, manje je u njima plagioklasa. U nekima su glinenci znatno pomućeni od proizvoda metamorfoze, ali negdje su oni i posve svježi. B i o t i t, na koji se čovjek rijetko može namjeriti u izbruscima, najviše

je kloritiziran. U neke je ušao, na pr. u one oko Studenca, granat, dakako u maloj količini. Gdjekada se u tim stijenama ipak nađe i obilje biotita. Takve stijene naliče na gnajs, a nailazimo na njih ispod Studenca tamo, gdje se put u Gredec spušta prema Gradeškoj Reci. Na nekoliko mjesta namjerio sam se u granitima na amfibolite. Tako na pr. više Konča na putu prema Studencu, pa u samoj okolini Studenca. U nekima od njih, na pr. u onima od Studenca, ušao je u njegov sastav uz amfibol i glinenac još i biotit.

Spustivši se putem sa Studenca ispod Vardine Čuke (kota 330) u Gradešku Reku, niz koju taj put vodi dalje u Gradec, zašli smo u kraj, koji se petrografski mijenja. Tu prestaju granitske stijene, a mjesto njih javljaju se zrnaste amfibolske, u kojima, odmah kako se ide putem niz Gradešku Reku, nailazimo uz obale potoka na guste svijetlosive stijene. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da su sastavljene od posve raspalih plagioklasa, koji su se razvili najviše u obliku pločastih prizmatsko oduljenih idiomorfnih sraslaca. Leže kao utrusci u osnovi stijene. Među utruscima nalazimo još i pokoje oveće zrno kremena, koje je korodirano. Osnova je sastavljena od raspalog zrnja glinenca i zrnaca kremena. Vjerojatno se u stijeni nalazio među utruscima i biotit, jer se vidi ovdje ondje klorita, koji je zadržao formu, što je ima biotit. Od sekundarnih minerala ima epidota. Svojom strukturom podsjeća ova stijena na efuzivne, pa bi po svom mineralnom sastavu mogla pripadati možda u dacite.

Sve do pred Gradec susretamo putem zrnate stijene, koje svojom spoljašnošću podsjećaju na gabre. No u izbrusku pod mikroskopom možemo se osvjedočiti, da su to amfibolske stijene, u kojima je glavni mineralni sastavak amfibol i plagioklas. Ali među njima nađe se i takvih, gdje se uz ova dva glavna minerala razvio još i kremen. U takvima se u izbrusku pod mikroskopom vidi, kako su se glinenci posve raspali u neki smeđastopraškasti mutež. Još se zapažaju na njima tragovi njihovih polisintetskih sraslaca; pripadaju dakle plagioklasima. Razvili su se u krupnim kristaloidima, koji su najviše u zoni prizme idiomorfni, pa se u presjecima vide oduljeno pločasti. Iza plagioklasa najobilniji je sastavak kremen. Nalazi se u alotriomorfnom krupnijem zrnju. Amfibola je dosta. Razvio se obično u idiomorfnim kristaloidima, pa se na njima vide i terminalne plohe. U poprečnim prerezima vide se njegovi karakteristični heksagonski obrisi. Pleohroizma je jasna: a = blijedožut, b = muzgavosmeđ, c = zelen. Kut pomračenja 15^0. U stijeni je bilo i biotita, ali je on posve kloriti-

ziran. No većinom su ove amfibolske stijene bez kremena. Svagdje su u njima plagioklasi veoma raspadnuti, a amfibol, kao u maločas spomenutoj stijeni, od česti idiomorfan i u krupnim individuima. Ovo bi bile neke vrste dioritske stijene, o čemu će dakako najvjerniju sliku dati njihova kemijska analiza. Među njima ima i takvih, gdje je amfibol zamijenjen piroksenom. I u takvima su se plagioklasi gotovo posve raspali.

Ako se od Graca uz željezničku prugu uputimo ispod Kefalove Čuke do ušća potoka Vodesir, što dolazi sa Ovčarske Čuke, nailazimo na dijabazne (melafirske) stijene. One se prostiru uz napomenuti potok, ali ih tu domalo zamjenjuje gabro. Kroz njega probija negdje u početku uz potok Vodesir gusta efuzivna stijena, u kojoj se u izbrusku pod mikroskopom vidi, da je tipske porfirne strukture hijalopilitskoga tipa. U osnovi leže idiomorfni pločasto oduljeni plagioklasi puni siva muteža od proizvoda njihove metamorfoze. Osnova je kristalasta, a sastavljena je pretežno od sićušnih listića klorita i od sićušna agregata nekoga bezbojnoga minerala, posve nepodesnog za optička istraživanja, koja bi otkrila njegovu prirodu. Još se u osnovi vide uzani, štapićasti individuumi plagioklasa, pokoje zrnce kremena i nešto češće epidota. U tim se gabrima nalaze žile melafira, pa ćemo se na njih namjeriti uza sam potok i u njemu idući prema Ovčarskoj Čuki. U izbrusku pod mikroskopom vidi se karakteristična struktura, koju imaju bazalti i melafiri. Stijena je sastavljena od sitnih uzanih štapića plagioklasa, između koga se sabrao klorit, i od obilja magnetitskog zrnja, zbog koga stijena osjetljivo djeluje na magnetsku iglu. Nađe se dosta često i sekundarnoga kalcita. Gabri su sastavljeni od plagioklasa i dijalaga, koji je ovdje ondje od česti uralitiziran. Plagioklasi su dosta svježi, a razvili su se u krupnim kristaloidima, kako je to već obično u toj stijeni. Negdje se među njima namjeri čovjek na takve, u kojima su se plagioklasi posve raspali u smeđi mutež, ali se piroksen uščuvao u svojoj svježini. Kao sekundarni mineral javlja se u njima klorit. Ispod Ovčarske Čuke prestaju gabroidske stijene, a zamjenjuju ih granitske, koje zalaze odavde u Gradešku planinu.

Dijabazne (melafirske) stijene, što se nalaze od Graca do ušća Vodesira u Vardar kao južni obronci Kefalove Čuke, prostiru se dalje na zapad uz lijevu obalu Vardara kao južni dijelovi Kara Daga i Ljutkova Rida. Stijene niže ušća Ljutkove Reke od česti su gusta, a od česti zrnata sastava. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da su one gustoga sastava inter-

sertalne, dijabazne strukture sa prilično uščuvanim prutićasto oduljenim plagioklasima. Piroksena u izbrusku nema, ali je zato dobrano klorita. Još se vidi obilje magnetita i gdjegdje sekundarna kalcita. Zrnate stijene sastavljene su uglavnom od plagioklasa i piroksena. Plagioklas je ponajviše pomućen sivim trunjem. Većinom se razvio u oduljenim odebelim prutićima. Piroksena je mnogo. Javlja se u krupnijem nepravilnom bezbojnom zrnju. Magnetita je prilično, a od sekundarnih minerala nalaze se klorit i kalcit.

Ispod Ljutkova Rida idući dalje uz Vardar preko potoka, što dolazi sa Košarke, nailazimo svuda na dijabazne (melafirske) stijene. No one tu doskora prestaju, pa se nešto jugozapadno ispod kote 300 javljaju zrnate, zelenkastosive, koje, kako se to razbira u izbruscima pod mikroskopom, pripadaju u grupu gabroidskih stijena. One se svojim licem donekle odvajaju od gabra, što se javljaju u ovom kraju. Sastavljene su uglavnom od plagioklasa i piroksena. Plagioklas se većinom toliko raspao, da je sav pomućen i za optička istraživanja rijetko gdje podesan. Češće se zapaža, da se razvio u uskoploćastim kristaloidima oštrih obrisa u zoni prizme. Gdje nije pomućen, zapaža se valovito pomračenje, a negdje i lupinasta građa. Piroksen je veoma obilan, pa ovdje ondje preteže nad plagioklasom. Razvio se u krupnim kristaloidima, koji su bezbojni i posve svježi. Još ima magnetita, pa nešto malo vlaknata amfibola i pokoje zrno kalcita.

Na tim stijenama leži kao velika krpa mrkosiva žilava stijena, koja se diže iz samog Vardara pokrivajući gabroidske stijene ispod kote 300. To je neke vrste prijelaz olivinskoga gabra u troktolit. U izbrusku naime pod mikroskopom, vidi se da je sastavljena većinom od plagioklasa i olivina. Plagioklas se razvio u krupnim kristaloidima kroja, kakav imaju ti minerali u gabrima. Svjež je. Olivina je vrlo mnogo, a javlja se u krupnim alotriomorfnim individuima, koji su nepravilno raspucali, a pukotine su ispunjene serpentinskom tvari kao proizvodom olivinske metamorfoze. Negdje je mineralna tvar, što ispunjava olivinske pukotine, znatna dvoloma, što zaključujem po njenim živim interferencijskim bojama. Nađe se u izbrusku i monoklinskoga piroksena. No on toliko zaostaje za plagioklasom i olivinom, da ovu stijenu možemo smatrati više troktolitom negoli gabrom, odnosno da je to, kako sam istakao, prijelaz olivinskoga gabra u troktolit. Ima u njoj, dakako, i magnetita.

Te gabroidske stijene putem prema Čelevcu brzo prestaju, a mjesto njih javljaju se opet dijabazi (melafiri) i oko ušća Iberliske Reke u Vardar vapnenjaci. Dijabaznomelafirske stijene još ćemo svuda naći putem od Čelevca preko Tarlabe u Košarku. Ispod same Košarke od česme uz potočić Činarli (Činarli dere; u karti nije unesen) javljaju se granitske stijene, na kojima se nalazi gotovo posve porušeno selo Košarka. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da su sastavljene pretežno od plagioklasa i kremena. Plagioklas se toliko raspao, da je sav pomućen smeđim trunjem, pa se malogdje nađe njegovih kristaloida, u kojima se uščuvalo malo od njegove tvari. Većinom su to ploćasto oduljeni presjeci sa jasnom idiomorfijom u zoni prizme. Kremen je kao i plagioklas veoma obilan, a razvio se u alotriomorfnom zrnju, no nađe se i takvih zrna, na kojima se zapažaju tragovi korozije. Da je u stijeni bilo nešto malo biotita, vidi se po kloritu, koji je postao iz biotita zadržavši njegove forme. Te granitske stijene prostiru se na sjever prema Sivri Tepe, a ispod Košarke s južne strane nailazimo najprije na nešto malo trošna gabra, u kome se nalaze veliki kristaloidi raspaloga plagioklasa i krupna zrna uščuvana piroksena. Na tom gabru leži melafir, u kome je malo utruska, i to od uzanih plagioklasa. Glavnu čest njegovu sačinjava osnova sastavljena od mnoštva mikrolita plagioklasa i od zrnja magnetita. Mikroliti plagioklasa često se skupljaju lepezasto.

Spuštajući se dalje niz potok ispod Košarke, susrest ćemo svuda dijabaznomelafirske stijene, koje se prostiru sve do Vardara. Na njih nailazimo, ako se uputimo niz Vardar od Graca prema Udovu. Tu one izgrađuju južne obronke brda između Graca i željezničke stanice Strumica (Udovo). Gusta su sastava, mrkosive, gotovo crne, a u izbrusku pod mikroskopom pokazuju jednaku sliku kao melafiri s gabra ispod Košarke, t. j. sastavljeni su ponajviše od osnove, u kojoj leži tek pokoji kratko prutićasti plagioklas, a sama je osnova sva od mnoštva plagioklasnih mikrolita i zrna, zatim kristalnih skeleta magnetita.

Dok su te stijene uz željezničku prugu dosta svježe, nešto više ušća Baraklijske Reke (taj naziv nije unesen u kartu) javljaju se takve stijene, koje su veoma trošne, guste i smeđastosive. U izbrusku pod mikroskopom malo šta je ostalo od prvobitnih minerala. Vidi se, da je stijena bila sastavljena ponajviše od plagioklasa, koji su se raspali u neki smeđi mutež, pa se od njih uščuvala samo njihova forma, t. j. plagioklasi su se razvili najviše u obliku uzanih kraćih stupića, među

kojima se nađe i koji oštro oduljeni prutić, kako je to obično kod plagioklasa u dijabazima, pa poneki pločasto oduljeni individuum. Između mnoštva pomućenih raspalih glinenaca nalaze se mnoga bezbrojna zrnca kremena, za koje bi čovjek mogao reći da su prvobitna, jer gdjegdje u njih zadiru glinenci ili se nalaze u njima uklopljeni. Od sekundarnih minerala ima klorita, epidota. U stijeni se nalazi i podosta opâkoga minerala.

Ima među tim stijenama i takvih, koje su uočljive porfirske strukture. One su smeđožute, pa se u gustoj osnovi vide sitni utrusci glinenca i zrnca kremena. U izbrusku pod mikroskopom razabiraju se utrusci idiomorfno razvitih glinenaca, koji su pomućeni sitnim sivim prahom, tako da je njima potpuno prikrivena glinenčava tvar, ali se među unakrštenim nikolima jasno zapažaju polisintetski sraslaci vrlo uočljiva pomračenja. Tih je utrusaka malo. Još se kao utrusak razvio kremen sad sa oštrim kristalnim obrisima, sad u korodiranom zrnju. I njega je kao utruska malo. Osnova preteže u stijeni, a sastavljena je od sićušna zrnja pomućena glinenca i čista bezbojna kremena.

Idući uz Baraklijsku Reku prema selu Arazli nailazimo više puta u selo Đuleli, baš pri ušću prvog desnog pritoka Baraklijske Reke, na gnajsgranitske stijene. U ovom kraju sve do iznad sela Arazli one su više gnajsnoga negoli granitskoga lica. Sitnozrnasta su sastava, pa se u njima golim okom vide bijeli mutni glinenci, obilje listića biotita i siva zrnca kremena. U izbrusku pod mikroskopom pokazuju tipsku zrnastu strukturu granita. Kalijski glinenci su alotriomorfni u krupnom zrnju, a plagioklasi pločasti i u zoni prizme manje ili više idiomorfni. Većinom su pomućeni od proizvoda metamorfoze. Kremen je također obilan u alotriomorfnim zrnima. Biotit se nalazi u obliku oduljenih listića s izrazitom baznom kalavosti i jakim pleohroizmom: u smjeru kalavosti mrkosmeđ, gotovo crn, a u smjeru na to okomitom blijedožut. Naiđe čovjek i na pokoji listić muskovita. Više sela Arazli, tamo kod prvoga desnog pritoka više mlina, stijene su dobile vrlo lijepu škriljastu strukturu, pa se lako cijepaju u ploče. Na površini tako odlomljenih pločica sabira se obilje biotita. U izbrusku pod mikroskopom uglavnom se vide krupni, većinom pločasti plagioklasi, alotriomorfna zrna kremena, oduljeni individuumi biotita i sitni listići muskovita.

Od Arazli prema Barakli te stijene imaju granitsko lice i vrlo su svježe. Njihovi glinenci samo su malo zahvaćeni metamorfozom, pa su negdje više negdje manje pomućeni trunjem kao proizvodom metamorfoze. U njima se nalaze izvori kisele vode, pa ćemo na jedan takav izvor naići više Arazli na samoj Baraklijskoj Reci uz njenu lijevu obalu, i to više utoka potočića, što kod kote 225 utječe u taj potok. Kud protječe kisela voda, izlučuje se iz nje željezni hidroksid kao žuti talog. Takvih kiselih izvora nalazimo u gnajsima i ispod sela Barakli kod Ekišsu (kisela voda).

Granitske stijene iz okoline Arazli i Barakli, koje su, dakako, nastavak granitskih stijena Gradeške planine, prostiru se dalje na jugoistok preko sela Bašili i Plavuša k selima Vejseli i Ajranli (u karti Ajrakli) u okolini Valandova. Iz Valandova zašao sam u njih idući ispod Kule preko Kavla Kran u Vejseli. Kula, koja se nalazi na sjeverozapadu od Valandova, izgrađena je od vapnenjaka, iz kojih izvire vodom bogati mali potok goneći desetak mlinova. Njegov izvor, koji muslimani zovu Kajnak, a hrišćani Sv. Petar (jer se tu sastaju na slavu o Petrovdanu i svete vodu na izvoru) ima karakter tipskoga krškog vrela. Ispod golemih vodenih javora (činara) izbija studena voda kao jak potočić, koji već nekoliko metara od izvora goni mlin. Otuda spušta se u Valandovo, pa je pri svom naglom padu stvorio velike mase sedre (bigra). Za potresa god. 1931. odronio se od toga bigra oveći dio kao malo brdašce.

Idući od toga vrela prema manastiru sv. Đorđa, prelazimo preko kristalastih vapnenjaka, ispod kojih nešto pred samim manastirom izbijaju vapneni amfibolski škriljci, sastavljeni uglavnom od amfibola i vapnenca. Osim ta dva minerala nalazi se u tom škriljcu sitnih zrnaca glinenca, vjerojatno albita, jer su zrnca manjega loma od loma kanadskog balzama. Ima i nešto malo epidota. Dalje iza manastira stazom u smjeru Kavla Krana nailazimo ispod vapnenjaka na guste tamnosive stijene, koje se pod udarcem čekića lako lome u komade oštrih bridova. Na površini tako odlomljenih komada prevukla se tanka prevlaka limonitske tvari. U izbrusku pod mikroskopom vidi se, da je stijena sastavljena ponajviše od sitna zrnja glinenca, koji je manjega loma od kanadskog balzama, a negdje se zapažaju na zrncima sraslačke lamele (albit). Mnogo je u njoj sitnih zrnaca magnetita (stijena djeluje na magnetsku iglu) i malo epidota. Škriljaste stijene susrećemo svagdje na Kavla Kranu. Negdje su lica filitskoga, a pripadaju većinom vapnenim kloritskim škriljcima. Prostiru se sve do iznad sela Vejseli, gdje ih zamjenjuju granitske stijene. One su jednakoga mineralnog sastava kao i dosadašnje granitske stijene, o kojima je bilo govora. Prostiru se prema

Ajranli i Terzeli. Više Ajranli u potočiću, što dolazi sa jugoistočnih strana Kurban Buruna, nailazimo na škriljce, u koje je taj potočić urezao korito. To su amfibolski škriljci s pretežnim glinencima, među kojima se nalaži amfibol poređan u nizove, pa otuda stijeni veoma uočljiva škriljasta struktura. Uspinjući se preko Kurban Buruna na bilo, koje je od vapnenjaka, nailazimo na liskunske (tinjčaste) škriljce. Na samom sedlu ispod vapnenjaka izbija gnajs. Prešavši preko vapnenjačkoga bila prema Karatašu, prestaju vapnenjaci, a mjesto njih javljaju se kristalaste stijene. Među njima namjeri se čovjek na takve, koje strukturom i mineralnim sastavom pripadaju u dijabazne stijene. Takve su sive i sitnozrnaste, a u izbrusku pod mikroskopom vidi se, da su sastavljene uglavnom od plagioklasa i piroksena. Plagioklas je od metamorfoze prilično pomućen, a razvio se u oduljenim odebljim prutićima. Piroksen je dosta rasprostranjen i svjež. Po pukotinama nalazi se kalcita, a ima i nešto malo klorita. Mnogo se tu razvilo amfibolita, koji se prostire na zapadnim stranama Karataša prema Melkom Ridu i preko njega prema Rabrovu. U njemu se namjeri čovjek na manje dijelove gnajsa. Na samom Melkom Ridu prema Izleševu pomalja se oveća masa posve serpentizirana peridotita.

To je letimičan prikaz petrografske slike kraja s lijeve strane Vardara između Demir-Kapije i Valandova. Ne samo da će za potpuno poznavanje prirode tamošnjih stijena trebati izvršiti detaljna mikroskopska istraživanja i kemijske analize, nego će trebati još obići taj kraj, da se dobije i potpuna slika rasprostranjenja tamošnjih stijena u onim dijelovima, koje nisam dospio na tom istraživanju da pregledam.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 25. X. 1948.

Dr. VLADIMIR S. VRKLJAN

JOŠ O IZVOĐENJU MAGNETIČKOGA MOMENTA ELEKTRONA I POZITRONA

U radnji »Prilog izvođenju magnetičkog momenta elektrona i pozitrona«[1]) pokazao sam, da se kod metode valnog paketa (za izračunavanje magnetskog momenta elektrona i pozitrona) mogu upotrebiti četveroredne kvadratske hermitske matrice sa osam od nule različitih elemenata; ujedno se pokazuje, da se račun može izvršiti odjednom s beskonačno mnogo matrica[2]), jer je n u toj radnji bio pozitivan realan broj po volji.

U ovoj radnji ima se pokazati, da se i kod Darwinove metode[3]) može također raditi odjednom s beskonačno mnogo matrica α_1, α_2, α_3 i α_4, a ne samo, kako je dosada rađeno, koliko mi je poznato[4]), s matricama, što sadržavaju samo četiri elementa, koji se razlikuju od nule, a i oni su (realne ili imaginarne) jedinice.

U tu svrhu napisat ćemo matrice, upotrebljene u prošloj radnji, u obliku, u kom ih je napisao g. prof. dr. D. Blanuša.

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & a & 0 & -b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ -b & 0 & a & 0 \end{Vmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -ia & 0 & ib \\ ia & 0 & ib & 0 \\ 0 & -ib & 0 & -ia \\ -ib & 0 & ia & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{Vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & -a & 0 & b \\ b & 0 & -a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{Vmatrix} \qquad \alpha_4 = \begin{Vmatrix} -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & -a \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & -a & 0 & b \end{Vmatrix}$$

[1]) Rad Jugosl. Akademije, knj. **271**, 1948.

[2]) Kod dosadašnjih izvoda magnetskog momenta elektrona i pozitrona upotrebljene su — koliko mi je poznato — matrice sa četiri elementa, koji se razlikuju od nule, a i ti su uzeti kao (realne ili imaginarne) jedinice (isp. na pr.: L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, str. 137, ili: C. Schaefer, Theor. Phys., III-2, 1937, str. 451).

[3]) C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. London (A) **118**, 1928, str. 654 (meni nepristupno, citirano prema: A. Haas, Theor. Phys. **II**, 1930, str. 369, odn. prema: A. Haas, La mécanique ondulatoire, 1930, str. 178).

[4]) Vidi na pr. citate pod [3]).

gdje pretpostavljamo $a^2 + b^2 = 1$[5])[6]). Ovakav način pisanja možemo upotrebiti tim više, što je već u prošloj radnji na kraju spomenuto, da onaj oblik matrica, kakav je tamo dan i s kakvim je tamo račun izvršen, nije jedini oblik četverorednih kvadratskih hermitskih matrica sa osam od nule različitih elemenata, koji zadovoljava Diracove uvjete.

---

[5]) Na pr. $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Prof. dr. D. Blanuša primjećuje, da, ako se na Diracove matrice

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

primijeni operacija $U\alpha_\gamma U^{-1}$ ($\gamma = 1, 2, 3, 4$) pomoću ortogonalne matrice

$$U = \begin{Vmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & 0 & -\sin\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\varphi}{2} & 0 & \sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & 0 & \cos\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & -\sin\frac{\varphi}{2} & 0 & \cos\frac{\varphi}{2} \end{Vmatrix}$$

onda izlaze matrice navedene u ovoj radnji pod (1) uz uvjet $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$. Da su nove matrice Diracove, izlazi već iz poznatoga pravila: Ako na četiri Hermite-ove matrice $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i α_4, koje zadovoljuju Diracove uvjete, primijenimo operaciju $U\alpha_\gamma U^{-1}$ ($\gamma = 1, 2, 3, 4$), gdje je U bilo kakva unitarna matrica (t. j. elementi koje zadovoljavaju relacije $\sum_i u_{ir} \overset{*}{u}_{is} = \varepsilon_{rs}$, ovdje je $\overset{*}{u}_{is}$ konjugirano-kompleksna vrijednost od u_{is}; ako su elementi realni, onda su to ortogonalne matrice), tada su novo dobivene matrice β_γ opet Diracove. Da tako dobivene nove matrice β_γ doista opet zadovoljavaju Diracove uvjete, lako ćemo se osvjedočiti, jer je

$$\beta_\gamma^2 = U\alpha_\gamma U^{-1} \cdot U\alpha_\gamma U^{-1} = U\alpha_\gamma^2 U^{-1} = UU^{-1} = 1 \qquad (\gamma = 1,2,3,4)$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_\gamma \beta_\delta &= U\alpha_\gamma U^{-1} \cdot U\alpha_\delta U^{-1} = U\alpha_\gamma\alpha_\delta U^{-1} \\ \beta_\delta \beta_\gamma &= U\alpha_\delta U^{-1} \cdot U\alpha_\gamma U^{-1} = U\alpha_\delta\alpha_\gamma U^{-1} \end{aligned}\right\} \quad (\gamma\,\delta = 1,2,3,4\,;\ \delta \neq \gamma)$$

dakle $\beta_\delta \beta_\gamma = -\beta_\gamma \beta_\delta$, jer je $\alpha_\delta \alpha_\gamma = -\alpha_\gamma \alpha_\delta$.

Naročite pažnje vrijedna čini mi se primjedba prof. dra. D. Blanuše, da elementi navedene matrice U daju zapravo faktore za dvije

Onda Diracove jednadžbe, napisane za elektron odnosno pozitron prema matricama (1) uz pretpostavku prisutnosti izvanjega elektromagnetskoga polja glase:

$$\begin{aligned}
&P_1(a\Psi_2 - b\Psi_4) + P_2 i(-a\Psi_2 + b\Psi_4) + P_3(a\Psi_1 + b\Psi_3) + \\
&\qquad + m_0 c(-b\Psi_1 + a\Psi_3) - P_4\Psi_1 = 0 \\
&P_1(a\Psi_1 + b\Psi_3) + P_2 i(a\Psi_1 + b\Psi_3) + P_3(-a\Psi_2 + b\Psi_4) + \\
&\qquad + m_0 c(-b\Psi_2 - a\Psi_4) - P_4\Psi_2 = 0 \\
&P_1(b\Psi_2 + a\Psi_4) + P_2 i(-b\Psi_2 - a\Psi_4) + P_3(b\Psi_1 - a\Psi_3) + \\
&\qquad + m_0 c(a\Psi_1 + b\Psi_3) - P_4\Psi_3 = 0 \\
&P_1(-b\Psi_1 + a\Psi_3) + P_2 i(-b\Psi_1 + a\Psi_3) + P_3(b\Psi_2 + a\Psi_4) + \\
&\qquad + m_0 c(-a\Psi_2 + b\Psi_4) - P_4\Psi_4 = 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

---

rotacije u četverodimenzionalnom varijetetu x, y, z, u ($\xi, \eta, \zeta, \vartheta$). Za te rotacije daju naime prvi i treći redak matrice U

$$\xi = x\cos\frac{\varphi}{2} - z\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \zeta = x\sin\frac{\varphi}{2} + z\cos\frac{\varphi}{2}$$

a drugi i četvrti redak

$$\eta = y\cos\frac{\varphi}{2} + u\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \vartheta = -y\sin\frac{\varphi}{2} + u\cos\frac{\varphi}{2}$$

ako kut zakreta označimo s $\varphi/2$.

[6]) Posebno je pitanje, da li postoje matrice, kod kojih bi bilo $a^2 - b^2 = 1$ (na pr. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$) i koje bi zadovoljavale Diracove uvjete ($\alpha_\beta^2 = 1$, $\alpha_\beta\alpha_\gamma = -\alpha_\gamma\alpha_\beta$). Dade se pokazati, da se takove matrice zaista mogu konstruirati i kao primjer navodim ove (koje hermitske, a koje antihermitske) matrice:

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & a & 0 & -ib \\ a & 0 & ib & 0 \\ 0 & ib & 0 & a \\ -ib & 0 & a & 0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -ia & 0 & -b \\ ia & 0 & -b & 0 \\ 0 & b & 0 & -ia \\ b & 0 & ia & 0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{Vmatrix} a & 0 & ib & 0 \\ 0 & -a & 0 & ib \\ ib & 0 & -a & 0 \\ 0 & ib & 0 & a \end{Vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{Vmatrix} -ib & 0 & a & 0 \\ 0 & -ib & 0 & -a \\ a & 0 & ib & 0 \\ 0 & -a & 0 & ib \end{Vmatrix}$$

Primjenom Darwinove metode prijelaza od linearnih diferencijalnih jednadžbi na jednadžbe drugoga reda vode ove matrice na (suvišne) članove, kojih u (4a, b, c, d) nema; ali da one sigurno i usprkos tomu, što zadovoljavaju Diracove uvjete, ne odgovaraju rješenju problema, razabiramo otuda, što one primjenom metode valnog paketa ne vode uopće do rezultata. Štoviše njihovom primjenom ne može se izvesti čak niti jednadžba kontinuiteta. Razlog je svemu tome očito taj, što navedene matrice nisu hermitske.

gdje su P_β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) poznati operatori

$$\left[P_\beta \equiv \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\beta} - \frac{\varepsilon}{c}A_\beta \quad (\beta = 1,2,3,\ x_{1,2,3} = x, y, z,\ A_{1,2,3} = A_{x,y,z})\right.$$

$$\left. P_4 \equiv -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{c}V\right];$$

ovdje h, ε, c, $\vec{A}$ i V znače redom Planckovu konstantu, naboj čestice ($\varepsilon = \pm e$), brzinu svjetlosti u vakuumu, vektor-potencijal izvanjega magnetskoga polja i skalarni potencijal izvanjega električnoga polja.

Množimo li prvu jednadžbu (2) sa $-b$, a treću sa a i tako pomnožene jednadžbe zbrojimo, dobivamo

$$P_1\Psi_4 - iP_2\Psi_4 - P_3\Psi_3 + m_0c\Psi_1 - P_4(-b\Psi_1 + a\Psi_3) = 0 \quad (3a)$$

Množimo li pak drugu jednadžbu (2) sa b, četvrtu sa a i obje tako pomnožene jednadžbe zbrojimo, imat ćemo

$$P_1\Psi_3 + iP_2\Psi_3 + P_3\Psi_4 - m_0c\Psi_2 - P_4(b\Psi_2 + a\Psi_4) = 0 \quad (3b)$$

Množimo li pak prvu jednadžbu (2) sa a, treću sa b i tako pomnožene jednadžbe zbrojimo, izlazi

$$P_1\Psi_2 - iP_2\Psi_2 + P_3\Psi_1 + m_0c\Psi_3 - P_4(a\Psi_1 + b\Psi_3) = 0 \quad (3c)$$

Množimo li pak konačno drugu jednadžbu (2) sa a, četvrtu sa $-b$ i tako pomnožene jednadžbe zbrojimo, dobivamo

$$P_1\Psi_1 + iP_2\Psi_1 - P_3\Psi_2 - m_0c\Psi_4 - P_4(a\Psi_2 - b\Psi_4) = 0 \quad (3d)$$

Tek nakon ove priprave (koja kod dosadašnje Darwinove metode nije bila potrebna) možemo prijeći na izvođenje jednadžbi, koje nam daju (iako u okviru jednog izraza za energiju) magnetski momenat elektrona (odnosno pozitrona). »Pomnožimo« li jednadžbu (3a) sa $m_0c - bP_4$, jednadžbu (3c) sa $P_3 + aP_4$, a jednadžbu (3d) sa $P_1 - iP_2$, i sve tako dobivene jednadžbe zbrojimo, izlazi

$$(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m_0^2c^2 - P_4^2)\Psi_1 + i(P_1P_2 - P_2P_1)\Psi_1 +$$
$$+ i(P_2P_3 - P_3P_2)\Psi_2 + (P_3P_1 - P_1P_3)\Psi_2 +$$
$$+ (P_4P_1 - P_1P_4)(a\Psi_2 - b\Psi_4) + i(P_4P_2 - P_2P_4)(b\Psi_4 - a\Psi_2) +$$
$$+ (P_4P_3 - P_3P_4)(a\Psi_1 + b\Psi_3) = 0 \quad (4a)$$

»Množimo« li međutim jednadžbu (3b) sa $-m_0c + bP_4$, jednadžbu (3c) sa $P_1 + P_2$, a jednadžbu (3d) sa $-P_3 + aP_4$ i sve tako dobivene jednadžbe zbrojimo, dobit ćemo

$$(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m_0^2c^2 - P_4^2)\Psi_2 - i(P_1P_2 - P_2P_1)\Psi_2 +$$
$$+ i(P_2P_3 - P_3P_2^2)\Psi_1 - (P_3P_1 - P_1P_3)\Psi_1 +$$
$$+ (P_4P_1 - P_1P_4)(a\Psi_1 + b\Psi_3) + i(P_4P_2 - P_2P_4)(a\Psi_1 + b\Psi_3) +$$
$$+ (P_4P_3 - P_3P_4)(-a\Psi_2 + b\Psi_4) = 0 \quad (4b)$$

»Množimo« li pak jednadžbu (3a) sa $(-P_3 + aP_4)$, jednadžbu (3b) sa $P_1 - iP_2$, a jednadžbu (3c) sa $(m_0c + bP_4)$ i sve tako dobivene jednadžbe zbrojimo, imat ćemo

$$(P_1^2 + P_2^2 + P_3 + m_0^2c^2 - P_4^2)\Psi_3 + i(P_1P_2 - P_2P_1)\Psi_3 -$$
$$- i(P_2P_3 - P_3P_2)\Psi_4 - (P_3P_1 - P_1P_3)\Psi_4 +$$
$$+ (P_4P_1 - P_1P_4)(b\Psi_2 + a\Psi_4) - i(P_4P_2 - P_2P_4)(b\Psi_2 + a\Psi_4) +$$
$$+ (P_4P_3 - P_3P_4)(b\Psi_1 - a\Psi_3) = 0 \quad (4c)$$

»Množimo« li pak konačno jednadžbu (3a) sa $P_1 + iP_2$, jednadžbu (3b) sa $P_3 + aP_4$, a jednadžbu (3d) sa $-(m_0c + bP_4)$ i sve tako množenjem dobivene jednadžbe sumiramo, izlazi

$$(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + m_0^2c^2 - P_4^2)\Psi_4 - i(P_1P_2 - P_2P_1)\Psi_4 -$$
$$- i(P_2P_3 - P_3P_2)\Psi_3 + (P_3P_1 - P_1P_3)\Psi_3 +$$
$$+ (P_4P_1 - P_1P_4)(-b\Psi_1 + a\Psi_3) + i(P_4P_2 - P_2P_4)(-b\Psi_1 + a\Psi_3) +$$
$$+ (P_4P_3 - P_3P_4)(b\Psi_2 + a\Psi_4) = 0 \quad (4d)$$

Iz ovih jednadžbi razabiramo, da nam one s obzirom na magnetski momenat elektrona i pozitrona daju točno ono, što dobivamo i primjenom četverorednih matrica sa četiri različita elementa, koji se razlikuju od nule; formalna je razlika tek kod električkoga momenta, jer u navedenim jednadžbama dolaze u vezi s njim (kao faktori) po dvije valne funkcije od četiri, dakako množene sa a i b (gdje je $-1 < a,\ b < +1$ zbog $a^2 + b^2 = 1$), sve to dakako zbog karaktera upotrebljenih matrica.

Međutim je pitanje, koje je ovdje zanimljivo i kojega nema kod primjene matrica sa četiri elementa različita od nule, u tome, da li bismo mogli odmah napisati jednadžbe (3a, b, c, d) i bez onih (naprijed spomenutih) računa s jednadžbama (2).

Lako će se pokazati, da je to moguće, ako samo izvedemo transpoziciju matrice α_1 i tako transponiranu matricu α_1 postavimo kao matricu α_V. K dosadanjim matricama (1) trebalo bi, naime, zbog potpunosti pripisati zapravo još jediničnu matricu $\alpha_5 = 1$, jer takovu [u sustavu jednadžbi (2)] zapravo i kombiniramo s operatorom P_4 (u simbolički izraz $P_4 \alpha_5 \Psi$). Ako želimo odmah napisati jednadžbe (3a, b, c, d), onda mjesto matrice α_5 moramo upotrebiti matricu α_V, koju konstruiramo prema pravilu

$$\alpha_1 \alpha_V = \alpha_V \alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{5a}$$

dok mjesto α_1, α_2, α_3 i α_4 moramo upotrebiti matrice

$$\alpha_I = \alpha_V \alpha_1, \quad \alpha_{II} = \alpha_V \alpha_2, \quad \alpha_{III} = \alpha_V \alpha_3, \quad \alpha_{IV} = \alpha_V \alpha_4 \tag{5b}$$

Isto takove konačne jednadžbe (4a, b, c, d) dobili bismo i onda kad bismo primjenom transpozicije matrice α_3 postavivši

$$\alpha_V \alpha_3 = \alpha_3 \alpha_V = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{6a}$$

$$\alpha_I = \alpha_V \alpha_1, \quad \alpha_{II} = \alpha_V \alpha_2, \quad \alpha_{III} = \alpha_V \alpha_3, \quad \alpha_{IV} = \alpha_V \alpha_4 \tag{6b}$$

napisali jednadžbe, koje odgovaraju jednadžbama (3a, b, c, d) i onda iz njih izveli (4a, b, c, d); odnosno kad bismo to učinili primjenom transpozicije matrice α_4 prema shemi

$$\alpha_V \alpha_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{7a}$$

i postavivši

$$\alpha_I = \alpha_V \alpha_1, \quad \alpha_{II} = \alpha_V \alpha_2, \quad \alpha_{III} = \alpha_V \alpha_3, \quad \alpha_{IV} = \alpha_V \alpha_4 \tag{7b}$$

Ali i primjena transpozicije matrice α_2 prema shemi

$$\alpha_V \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{8a}$$

uz postavljanje

$$\alpha_I = \alpha_V \alpha_1, \quad \alpha_{II} = \alpha_V \alpha_2, \quad \alpha_{III} = \alpha_V \alpha_3, \quad \alpha_{IV} = \alpha_V \alpha_4 \tag{8b}$$

vodi također konačno do jednadžbi (4a, b, c, d).

Možda nije sasvim bez interesa spomenuti, da sve ovako izvedene matrice α_I, α_{II}, α_{III}, α_{IV} *i* α_V **nijesu** hermitske; u slučaju (5b) to vrijedi za α_{III}, u slučaju (6b) to vrijedi za α_1, a u slučaju (7b) za α_V *i* α_{II}; i konačno u slučaju (8b) vrijedi to za α_V *i* α_{IV}.

Isto tako može se pokazati, da za sve produkte α_B α_Γ (B, $\Gamma = $ I, II, III, IV) ne vrijedi D i r a c o v alternativni zakon; u slučaju (5b) taj zakon ne vrijedi za sve produkte s α_{III}, u slučaju (6b) analogno vrijedi za sve produkte s α_I, u slučaju (7b) analogno vrijedi za sve produkte sa α_{II}, i konačno u slučaju (8b) vrijedi analogno za sve produkte sa α_{IV}.

Posebno je pitanje produkata sa α_V. Kod D i r a c a, jer se radi o jediničnoj matrici ($\alpha_5 = \mathbf{1}$), vrijedi komutativni zakon za produkte od sve četiri D i r a c o v e matrice α_β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) sa α_5. U slučajevima (5a) do (8a) nije α_V jedinična matrica, pa je potrebno napose razmotriti produkte četiriju matrica α_I, α_{II}, α_{III} i α_{IV} sa α_V. U slučaju (5a, b) svi su produkti sa α_V komutativni osim $\alpha_V \alpha_{III}$; u slučaju pak (6a, b) svi su odnosni produkti komutativni osim $\alpha_I \alpha_V$; u slučaju pak (7a, b) i (8a, b) vrijedi obrnuto: svi produkti sa α_V alterniraju u predznaku osim produkta $\alpha_{II} \alpha_V$ [u slučaju (7a, b)] odnosno osim produkta $\alpha_V \alpha_{IV}$ [u slučaju (8a, b)].

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 25. X. 1948.

SADRŽAJ

Dr. VLADIMIR S. VRKLJAN:
O problemu proširenja Diracovih spinora na više komponenata 5

Dr. RUDOLF CESAREC:
O cirkularnim racionalnim krivuljama 4. reda, izvedenim iz izvjesnih konoida 39

Dr. Ing. RAJKO KUŠEVIĆ:
Rješavanje tročlanih jednadžbi elastičnosti postupkom neodređenih koeficijenata 83

Dr. FRANJO I. HAVLIČEK:
O problemu promjenljive konstante gravitacije 101

Dr. VILIM NIČE:
O strofoidali i prostornoj krivulji 4. reda na kugli . . . 109

Dr. VILIM NIČE:
O Plückerovu i nekim drugim konoidima 3. i 4. reda . . 117

Dr. MIROSLAV KARŠULIN, ANTONIJA TOMIĆ i ANTE LAHODNY:
Studije o boksitima, I. 125

Dr. HRVOJE IVEKOVIĆ i Dr. SMILJKO AŠPERGER:
Konduktometrijsko određivanje ugljičnog dioksida 139

Akademik FRAN TUĆAN:
Prinos poznavanju mineraloško-petrografskih prilika jugoistočne Makedonije 163

Dr. VLADIMIR S. VRKLJAN:
Još o izvođenju magnetičkoga momenta elektrona i pozitrona 187